

INTEGRIEREN
MIT DEM
INTEGRAPHEN CORADI

SYSTEM: ABDANK-ABAKANOWICZ

AUFGABEN AUS DER TECHNIK
MIT LÖSUNGSBEISPIELEN

VON

DR. H. SCHILT

HERAUSGEGEBEN VON G. CORADI

INTEGRIEREN
MIT DEM
INTEGRAPHEN CORADI

SYSTEM: ABDANK-ABAKANOWICZ

AUFGABEN AUS DER TECHNIK
MIT LÖSUNGSBEISPIELEN

VON

DR. H. SCHILT

HERAUSGEGEBEN VON G. CORADI

Nachdruck verboten.

Alle Rechte, insbesondere das der Uebersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
(Copyright 1950 by G. Coradi, Zürich.)

Druck : Imprimerie Centrale S. A., Neuchâtel (Suisse).

INHALT

| | Seite |
|--|-------|
| I Der Integraph. | 9 |
| 1. Mathematische Grundlagen | 9 |
| 2. Der Bau des Integraphen | 10 |
| a) Grundlagen | 10 |
| b) Eingehende Beschreibung | 10 |
| 3. Die Handhabung des Integraphen | 12 |
| II Die Integralkurven | 15 |
| 4. Bedeutung der Integralkurven | 15 |
| a) Das bestimmte Integral | 15 |
| b) Fortgesetzte Integration | 16 |
| III Anwendungen | 19 |
| 5. Bestimmung der Flächen und Momente von geschlossenen Kurven . . . | 19 |
| Numerisches Beispiel | 23 |
| 6. Querkräfte und Biegemomente eines belasteten Balkens | 24 |
| Numerisches Beispiel | 26 |
| 7. Elastische Linie | 27 |
| 8. Auflösen von algebraische Gleichungen | 28 |
| Numerisches Beispiel | 29 |
| 9. Deviationsmoment und höhere Momente | 30 |
| Numerische Beispiele | 32 |
| 10. Hauptträgheitsachsen | 34 |
| 11. Rotationskörper | 34 |
| 12. Differentiation | 38 |
| Beispiele | 39 |
| 13. Fehlerrechnung | 40 |
| 14. Linienintegrale | 42 |

VORWORT

In der Praxis hat man öfters von beliebig gegebenen Kurven die Integrale auszuwerten, wobei die Kenntnis der Integralkurve gewünscht wird. Gewöhnlich ist diese Arbeit mit viel Mühe verbunden, namentlich, wenn die Kurven nur graphisch gegeben sind. In diesem Falle kann man mit Vorteil den Integrappen verwenden.

Die vorliegende Schrift stellt sich die Aufgabe, Behandlung und Anwendungsmöglichkeiten des Integrappen in der Technik zu skizzieren und genaue Anleitung zu geben, wie die Integralkurven ausgewertet werden, welchen Einfluss die verschiedenen Stellungen des Integrappen auf die Kurven haben und wie diese bei der Auswertung zu berücksichtigen sind.

Diese Darlegung zerfällt naturgemäss in drei Teile. Im ersten Teil sind die Grundlagen des Instrumentes sowie dessen Bau und Behandlungsweise beschrieben. Der zweite Teil handelt von den wichtigsten Eigenschaften der verschiedenen Integralkurven, und der letzte Teil enthält Anwendungsbeispiele.

Die Möglichkeiten des Integrappen sind durch die Beispiele in dieser Schrift bei weitem nicht erschöpft. Es sollte aber dennoch möglich sein, die einschlägigen Probleme der Technik auf Grund der hier dargelegten Fälle mit dem Integrappen zu lösen. Eine Integration mit dem Integrappen kann bedeutend rascher erfolgen als dies auf graphischem oder numerischem Wege möglich ist. Aus diesem Grunde wäre es zu wünschen, wenn dieses Heft dazu beitragen könnte, dass der Integrapp mehr als bisher zum Integrieren herangezogen würde.

Ich möchte nicht verfehlen, an dieser Stelle Herrn G. Coradi für seine Ratschläge zu danken; auch hat er als Fachmann die Beschreibung des Apparates übernommen.

DER VERFASSER

I. DER INTEGRAPH

1. Mathematische Grundlagen

a) Das unbestimmte Integral

Es sei $y = g(x)$ eine Funktion, von der wir das unbestimmte Integral

$$\int g(x) dx = \int y dx$$

betrachten wollen. Dieses Integral ist eine neue Funktion $Y = G(x)$, die die Eigenschaft hat, dass ihr Differentialquotient $\frac{dY}{dx}$ proportional der Funktion $y = g(x)$ ist. In Zeichen:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{g(x)}{\lambda}$$

Definition
des unbestimmten
Integrals

Hierin ist λ eine von x unabhängige Grösse, die die gleiche Dimension wie x hat und der wir den Namen *Basis* der Integration beilegen wollen.

Basis

In der Mathematik wird die Basis gewöhnlich als Längeneinheit verwendet und deswegen in den meisten Formeln gar nicht geschrieben. Für das Folgende spielt sie aber eine wichtige Rolle.

Sowohl die Funktion $y = g(x)$ als auch $Y = G(x)$ können je durch eine Kurve dargestellt werden, wir nennen sie *Grundkurve*, bzw. *Integralkurve*.

Grundkurve
Integralkurve

Das unbestimmte Integral und damit die Integralkurve ist durch die oben gegebene Definition nicht vollständig festgelegt. Denn jede Kurve, die aus Y durch Parallelverschieben in Richtung der Y -Achse hervorgeht, besitzt die angeführte Eigenschaft. Die Integralkurve ist erst eindeutig bestimmt, wenn man angibt, wie gross ihre Ordinate für $x = x_0$ sein soll.

b) Konstruktion der Integralkurve

Die Integralkurve kann auf Grund ihrer Definition konstruiert werden. Von M aus (Abb. 1) werde nach links die Länge λ (Basislänge der Integration) $\bar{M}M$ abgetragen. Die Ordinate von \bar{M} schneide die x -Achse in U . UM besitzt dann die gleiche Richtung wie die Tangente der gesuchten Integralkurve, da $\frac{dY}{dx} = \text{tg } \tau$ ist.

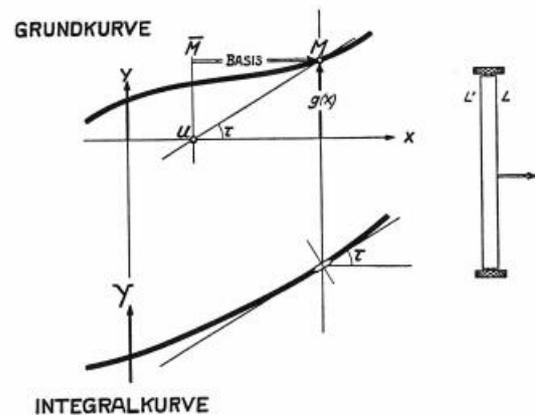


Abb. 1

INTEGRALKURVE UND GRUNDKURVE

Soll nun die Aufgabe mechanisch gelöst werden, so hat man nur einen Schreibstift oder ein Zeichenbrett nach der vorgegebenen Richtung UM zu führen. Die Aufgabe lässt sich, wie Abdank-Abakanowicz bemerkte, mit einer *Integrierrolle* lösen. Diese ist nichts anderes als ein scharfkantiges Rädchen, das auf dem Papier immer nur in der Richtung seiner Umdrehungsebene (= Normalebene zur Drehachse) fortschreiten kann. Wird die Achse der Integrierrolle stets normal zur Richtung UM geführt und gleichmässig mit der Ordinate von M fortbewegt, so beschreibt die Integrierrolle gerade die Integralkurve der vorgelegten Grundkurve. Die Konstruktion des Integraphen Coradi besteht darin, ein Rädchen in der eben beschriebenen Weise zu führen.

2. Der Bau des Integraphen

a) Grundlagen

Abbildung 2a und die perspektivischen Bilder zeigen uns den Bau des Integraphen. Dieser besteht aus zwei Linealen L und L' , die auf den Laufrollen r immer parallel zur y -Achse bleiben und nur in der Richtung der x -Achse beweglich sind. Auf diesen Linealen können sich zwei Wagen W und W' in der Richtung der y -Achse frei bewegen. Der eine trägt an einem Arm den Fahrstift t und der andere die Integrierrolle i und mit dieser den Schreibstift k . Von M aus geht ein Stab, der über U drehbar und verschiebbar gelagert ist, und der auf der andern Seite von U einen Wagen W'' trägt. Dieser Stab heisst *Richtlineal*. Mit Hilfe eines Parallelgestänges vermittelt der Wagen W'' der Integrierrolle die Richtung des Stabes MU .

Richtlineal

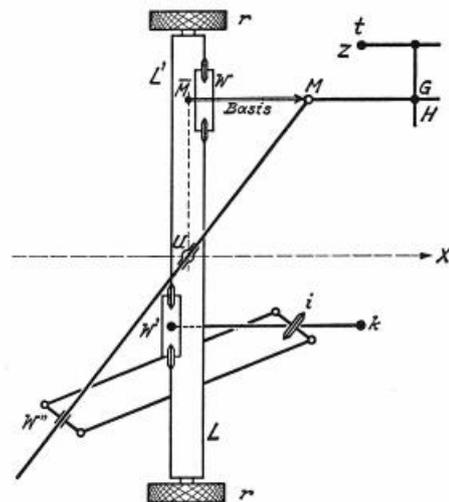


Abb. 2a

SCHEMA DES INTEGRAPHEN

b) Eingehende Beschreibung

Der Integraph hat auf dem Zeichenbrett drei Auflagepunkte, von denen zwei durch die an der Achse O befestigten Rollen r und r' (Abb. 2b') und der dritte durch den Fahrstift t oder dessen Stütze gebildet werden. Die beiden an gemeinschaftlicher Achse befestigten Rollen r geben dem Apparat eine zu dieser Achse rechtwinklige Führung, so dass der Apparat sich in dieser Richtung auf beliebig langer, gerader Linie auf dem Zeichenbrett bewegen lässt. Die U-förmige Führungsschiene, in welcher zwischen zwei Bügeln die Walze rr auf Kugellagern ruht, besitzt zwei zueinander parallele Geradfürungen L und L' , die rechtwinklig zu der Bewegung des Apparates und ihrerseits parallel zur Achse O der Walze rr gerichtet sind.

Führungswagen

In der Rinne der vordern Geradfürung L bewegt sich zwischen drei Rollen der Führungswagen W , der das mit einer Teilung versehene Basislineal B trägt. An dessen Ende befindet sich in einer verschiebbaren Hülse der Fahrstift t . Auf dem Basislineal B ist ferner eine mit Nonius und Mikrometerwerk versehene Hülse angebracht, die zum Einstellen der gewünschten

Orthogonalstellung

Basis

Arretierstift X

Einstellung der Basis

so ist die Umdrehungsebene der Integrierrolle ebenfalls parallel zur x -Achse eingestellt (Abb. 2c). Wir nennen dies die Orthogonalstellung des Integraphen. In dieser Stellung ist der Abstand der beiden Drehachsen des Richtlineals gleich der Basis des Apparates. (Die Basis entspricht dem Fahrarm des Polarplanimeters.)

Wenn in der Orthogonalstellung der Apparat sich bewegt, so erfolgt keine seitliche Bewegung des Integrierwagens. Der Führungswagen kann in dieser Stellung mittelst eines frei fallenden, mit X bezeichneten Stiftes fixiert werden. Sobald der Führungswagen die Orthogonalstellung erreicht hat, greift nämlich dieser Stift in eine Quernute ein, die sich in einem mittelst Schrauben seitlich verschiebbaren Stahlstückes befindet. Der Stift X kann bei Nichtgebrauch durch eine Vierteldrehung gesichert werden. Er bleibt dann in der Höhe.

Die vordere, auch in Kugeln gelagerte Drehachse des Richtlineals befindet sich in der Hülse N, die auf dem Basislineal B verschiebbar ist. Das Basislineal trägt eine Teilung in mm und in $\frac{1}{10}$ engl. Zoll. Mit Hilfe des Mikrometers und der angebrachten Nonien kann die Hülse N bequem auf $\frac{1}{10}$ mm oder $\frac{1}{100}''$ genau eingestellt werden. Die im Kasten des Instrumentes befestigte Tabelle gibt diejenigen Nonieneinstellungen an, die ganzzahligen Basislängen entsprechen.

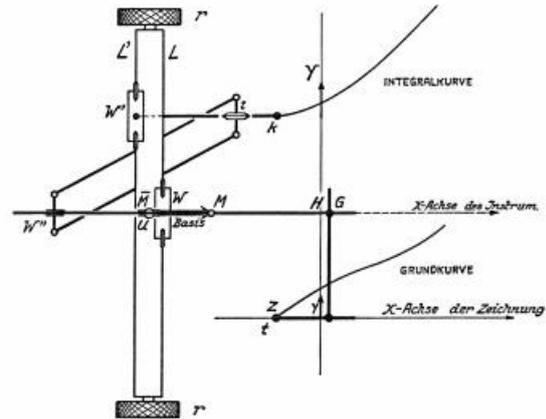
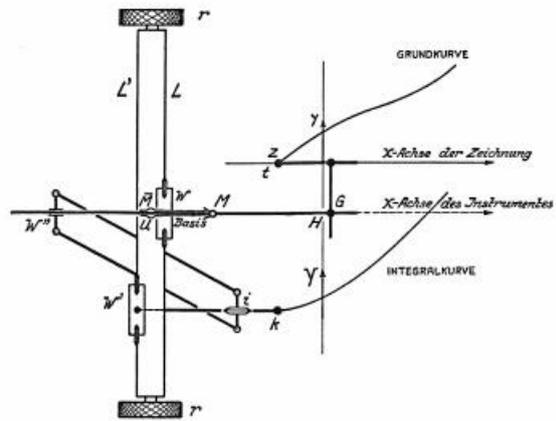


Abb. 2c

INTEGRAPH IN ORTHOGONALSTELLUNG

3. Die Handhabung des Integraphen

Soll mit Hilfe des Integraphen eine Integralkurve konstruiert werden, so muss der Apparat zuerst nach den Achsen der gegebenen Zeichnung orientiert werden. Dabei ist auf folgendes zu achten :

Orientierung des Apparates

1. Die Bewegung des ganzen Apparates muss in der Richtung der x -Achse erfolgen.
2. In der Orthogonalstellung muss der Fahrstift sich genau auf der x -Achse der Zeichnung bewegen.

Um dies zu erreichen, verfährt man so : Der Führungswagen wird mit dem Stift X in der Orthogonalstellung fixiert. Alsdann fasst man den Apparat links und rechts in den Walzenbügeln und hebt ihn etwas vom Papier auf. Der Apparat wird nun solange verschoben, bis der Fahrstift sich auf der x -Achse der Zeichnung befindet und gleichzeitig das Basis- und das Richtlineal parallel zur x -Achse liegen.

Um beim Orientieren die Lage zu korrigieren, kann auch die Führungsschiene L oder L' als Visier auf eine Ordinate benützt werden, da Führungsschiene und Ordinate ebenfalls parallel zueinander sein müssen.

Bewegt man bei fixierter Nullstellung den Apparat in der x -Richtung, so soll der Fahrstift auf der gewählten Abszissenachse bleiben. Abweichungen sind durch weiteres Ändern der ganzen Lage des Apparates zu korrigieren.

Der Apparat lässt sich leichter orientieren, wenn man eine Vorrichtung benutzt, die gestattet den Fahrstift seitlich zu verschieben (vgl. perspektivische *Abb. 2b*). Diese Vorrichtung besteht in einer besondern Hülse H , in der ein Lineal F durch Druckschrauben festgeklemmt werden kann. Dieses Lineal ist um ca. 25 cm oder 10" verschiebbar und trägt an seinem Ende die Zeichenhülse Z . Für Integraphen, die mit dieser Vorrichtung versehen sind, dient als dritter Stützpunkt eine nach allen Richtungen drehbare Laufrolle R . Neben dieser Rolle befindet sich der Führungsriff G . Der am verschiebbaren Stab befindliche Fahrstift t schwebt ganz frei und soll nie zur Führung des Apparates benützt werden.

Vorrichtung zur Verschiebung des Fahrstiftes

Führungsriff G

Diese Vorrichtung gestattet nun auch, dass mit dem einmal orientierten Apparat mehrere Integrationen ohne Neuorientierung ausgeführt werden können. Man hat nur den Fahrstift auf die neue x -Achse einzustellen.

Ehe man eine Figur umfährt, muss man den Integrierwagen W' immer so stellen, dass seine Bahn soweit als möglich frei ist. Dabei haben wir folgendes zu beachten: Bewegt man den Integraphen in der Richtung der Basis, so hat der Integrierwagen W' die Tendenz, nach dem Ende derjenigen Hälfte von LL' zu laufen, auf dem sich der Führungswagen W befindet. Bewegt man den Apparat umgekehrt, so geht der Integrierwagen gegen das andere Ende. Die Bewegung des Wagens erfolgt umso rascher, je weiter der Führungswagen von der Mitte entfernt ist. Nach dieser Regel überlege man sich immer zuerst, in welcher Richtung der Integrierwagen läuft und lässt dann diesen möglichst am entgegengesetzten Ende auf die Zeichnung hinunter. Zum Heben und Senken der Integrierrolle dient die Schraube h , die am Integrierwagen W' angebracht ist. Man kann die Rolle aber auch von Hand heben und verschieben.

Vorteilhafte Ausgangsstellung

Die Ordinattendifferenzen der Integralkurve können auch am Integraphen direkt bis auf Zehntelmillimeter genau abgelesen werden. Das Lineal L' besitzt nämlich eine Millimeterteilung, und der Wagen W' trägt einen Nonius.

Bei kurzen Basen (z. B. 5-8 cm) ist die seitliche Bewegung des Fahrwagens W von der Orthogonalstellung aus in der Richtung nach positiven und negativen y beschränkt. Dies rührt sowohl von der maximal zulässigen Winkelbewegung des Integrierrollenrahmens C als auch von der Stellung des Wagens W'' zur Führungsschiene L' her. Der Wagen W'' vermag nämlich die Führungsschiene zu berühren. Man kann daher grosse Figuren nicht mit einer kleinen Basis umfahren.

Die Fahrstütze s bewirkt, dass der Fahrstift etwas über der Zeichenebene schwebt. Um den Anfang einer Umfahrung zu markieren, sticht man den Fahrstift durch einen leichten Druck mit dem Finger ins Papier; eine Feder hebt diesen Stift wieder in die Höhe.

Der Fahrstift oder dessen Arm ist in einer Hülse H auf dem Basislineal festgeklemmt. Der Fahrstift lässt sich mit der Hülse verschieben, derart, dass die Abszissendifferenz zwischen Fahrstift und Schreibstift eine runde Zahl wird. Die zusammengehörigen Ordinaten der Grund- und der Integralkurven sind dann um diese Differenz gegeneinander versetzt. Bei kleinen Basen gelingt es, den Fahrstift auf die Ordinate der Schreibfeder einzustellen (Abszissendifferenz 0, korrespondierende Ordinaten). Aber auf diese Weise verliert man an Weg für die Bewegung des Integrier- und des Führungswagens, da diese dann nicht nebeneinander vorbeigehen können. Unsere Zeichnungen sind alle, der Uebersichtlichkeit halber, mit korrespondierenden Ordinaten ausgeführt.

Versetzte Ordinaten

Basisrichtung

Für die Auswertung der Zeichnung ist es noch wichtig zu wissen, welche Richtung die Basis des Integraphen beim Zeichnen hatte. Als Basisrichtung bezeichnen wir die Richtung der Strecke $\bar{M}M$ von \bar{M} nach M (vgl. Abb. 3). Hat die Basis die gleiche Richtung wie die positive x -Achse (Führungswagen W auf der gleichen Seite wie pos. x), so ist die positive Y -Richtung der Integralkurve gleich gerichtet wie die positive y -Achse der Grundkurve. Sind aber Basisrichtung und x -Richtung entgegengesetzt, so wechseln bei jeder Integration die positiven Ordinatenrichtungen (vgl. Abb. 3, 4b, 5a, 6b, 7, 8). Es ist zu empfehlen, bei jeder Zeichnung die Lage des Instrumentes, die Grösse und die Richtung der Basis schematisch anzugeben.

Alle Abbildungen in diesem Heft, die Integralkurven darstellen, sind verkleinerte Bilder von Kurven, die mit dem Integraphen Coradi Type II ausgeführt wurden. Die angegebenen Masse beziehen sich auf die verkleinerten Bilder und können dort direkt nachgemessen werden. Die Basislängen sind auch verkleinert; in Wirklichkeit ist die kleinste mögliche Basis bei diesem Integraphenmodell 5 cm.

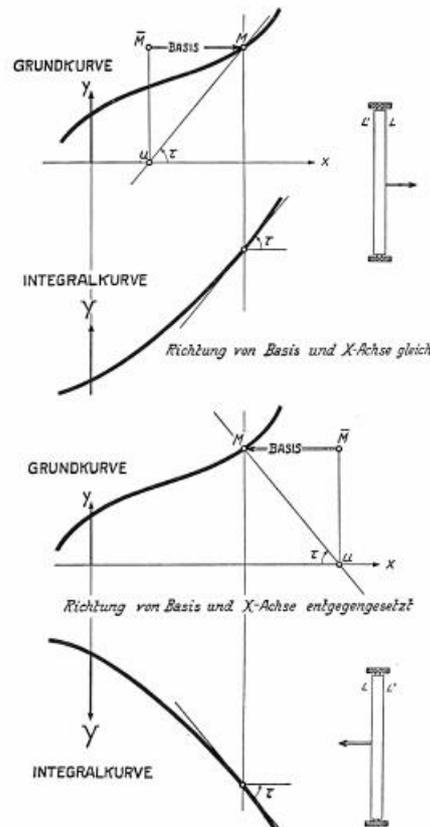


Abb. 3

DER EINFLUSS DER BASISRICHTUNG

II. DIE INTEGRALKURVEN

4. Bedeutung der Integralkurven

a) Das bestimmte Integral

Eine Kurve, die wir Grundkurve nennen wollen, habe die Ordinaten y und stelle die Funktion $y = g(x)$ dar. a und b seien zwei bestimmte Abszissen dann heisst

$$F = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b y dx$$

das *bestimmte Integral* der Funktion $y = g(x)$ zwischen den Grenzen a und b oder kurz das *bestimmte Integral* von y zwischen a und b .

Unter dem bestimmten Integral stellt man sich gewöhnlich — etwas ungenau allerdings — eine Summe vor, deren Summanden alle kleine Grössen sind¹. In unserem Falle sind die Summanden Flächen df von Rechtecken, mit den Höhen y und den Breiten dx (vgl. *Abb. 4a*).

$$\int_a^b y dx = \int_a^b df.$$

Von unserem bestimmten Integral F dürfen wir sagen, dass es gleich der Fläche $F(ab PQ)$ sei, die von der Grundkurve, der x -Achse und den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird, da

$$\int_a^b df = F(ab PQ).$$

Zwischen dem bestimmten Integral und der in Nr. 1 definierten Integralkurve besteht nun eine bedeutsame mathematische Beziehung. In der Theorie der Integralrechnung wird gezeigt, dass

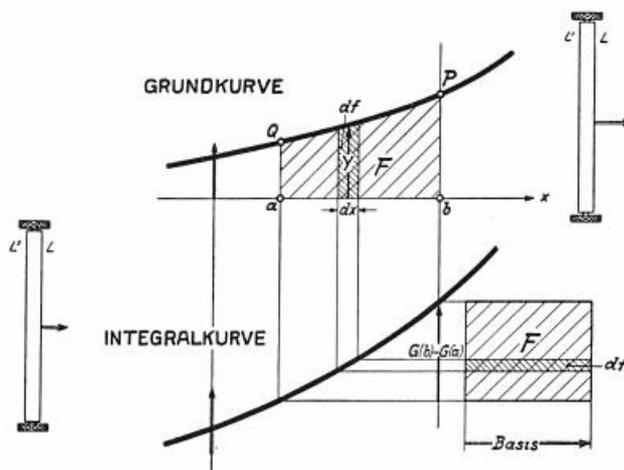


Abb. 4a

INTEGRALKURVE UND FLÄCHENINHALT

¹ Für die genaue Formulierung und für die Beweise sei auf die reiche Literatur über Integral- und Differentialrechnung hingewiesen.

das bestimmte Integral von y zwischen a und b gleich ist der Differenz der Ordinaten $G(b) - G(a)$, einer Integralkurve von y , multipliziert mit der Basis der Integration.

$$[G(b) - G(a)] \text{ mal Basis} = \text{Fläche (ab PQ)} .$$

Ein bestimmtes Integral lässt sich daher in einfacher Weise aus der durch den Integranden gezeichneten Integralkurve ermitteln. Nennen wir die Ordinatendifferenz der Integralkurve ΔY , so kann man schreiben :

$$\lambda \cdot \Delta Y = \int_a^b y \, dx = F(\text{ab PQ}) .$$

b) Fortgesetzte Integration

Die zuerst erhaltene Integralkurve Y nennen wir nun erste Integralkurve Y_1 . Diese Kurve benutzen wir als neue Grundkurve und erhalten durch Integration daraus eine zweite Integralkurve Y_2 . Das Verfahren kann auch mit dieser Kurve wiederholt werden. Wir erhalten so höhere Integralkurven, die wir der Reihe nach numerieren.

Um die Bedeutung dieser Kurven zu erfassen, kann man folgende Ueberlegungen durchführen (vgl. Abb. 4b) :

Nach dem oben Dargelegten ist nun $\Delta Y_2 = Y_2(\xi) - Y_2(0)$ proportional der Fläche F_1 , die durch die erste Integralkurve, die x -Achse und die entsprechenden Ordinaten umschlossen wird.

Es ist daher :

$$\lambda \Delta Y_2 = F_1 .$$

Diese Fläche kann aber aus horizontal-liegenden Flächenelementen df_1 aufgebaut werden. Aus der Abbildung 4b liest man ab :

$$df_1 = (\xi - x) \frac{df}{\lambda} .$$

Daraus folgt dann :

$$F_1 = \int_0^\xi df_1 = \int_0^\xi (\xi - x) \frac{df}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\xi (\xi - x) df .$$

Das Integral $M_\xi = \int_0^\xi (\xi - x) df$ bezeichnet

man als das statische Moment der Fläche F bezüglich $x = \xi$ als Achse. Aus der zweiten Integralkurve lässt sich somit das statische Moment der Grundfläche bezüglich irgend einer zur y -Achse parallelen Geraden bestimmen.

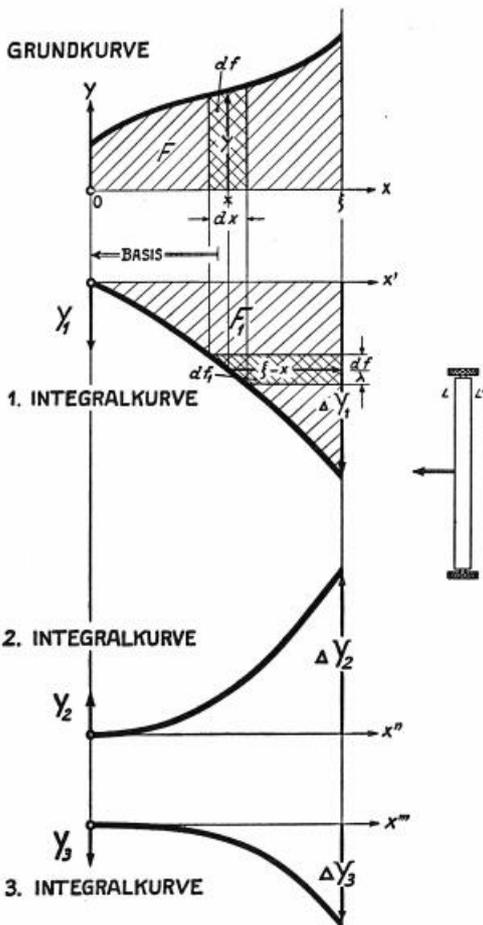


Abb. 4b

FLÄCHE, STATISCHES MOMENT UND TRÄGHEITSMOMENT

Es ist :

$$M_{\xi} = \lambda^2 \cdot \Delta Y_2.$$

Statisches
Moment

Für die dritte Integralkurve folgt daraus nun, dass $\Delta Y_3 = Y_3(\xi) - Y_3(0)$ proportional ist dem statischen Moment der Fläche F_1 in bezug auf $x = \xi$ als Achse. Für einen Summanden dieses Moments ergibt sich :

$$\frac{\xi - x}{2} df_1 = \frac{1}{2} (\xi - x)^2 \frac{df}{\lambda}.$$

Wir erhalten daher :

$$\lambda^2 \Delta Y_3 = \int_0^{\xi} \frac{\xi - x}{2} df_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\xi} (\xi - x)^2 \frac{df}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\xi} (\xi - x)^2 df.$$

Das Integral $J_{\xi} = \int_0^{\xi} (\xi - x)^2 df$ ist nun gleich dem Trägheitsmoment der Grundfläche in bezug auf $x = \xi$ als Achse. Daher :

$$J_{\xi} = 2\lambda^3 \cdot \Delta Y_3.$$

Trägheits-
moment

In dieser Weise kann man fortfahren und erhält für die höhern Momente :

$$M_{n\xi} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1)n \cdot \lambda^{n+1} [Y_{n+1}(\xi) - Y_{n+1}(0)].$$

Höhere
Momente

Hierin ist Y_{n+1} die Ordinate der $n + 1$. Integralkurve und $M_{n\xi}$ das Moment n .ter Ordnung von F bezüglich $x = \xi$ als Achse.

$$M_{n\xi} = \int_0^{\xi} (\xi - x)^n df.$$

Zusammenfassend kann gesagt werden :

Die erste Integralkurve dient zur Bestimmung der Fläche der Grundkurve.

Die zweite Integralkurve gibt die statischen Momente der Grundfläche.

Die dritte Integralkurve gestattet die Bestimmung der Trägheitsmomente der Grundfläche.

Man beachte, dass die Momente immer bezüglich Achsen geliefert werden, die den Linealen L und L' parallel sind.

Werden nach jeder Integration andere Basen verwendet, so sind unsere Formeln sinn- gemäss zu erweitern :

$$F = \lambda_1 \Delta Y_1,$$

$$M_{\xi} = \lambda_1 \lambda_2 \Delta Y_2,$$

$$J_{\xi} = 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \Delta Y_3.$$

.....

$$M_{n\xi} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1)n \cdot \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1} \Delta Y_{n+1}.$$

Hierin bedeutet λ_i die Basis bei der i .ten Integration.

III. ANWENDUNGEN

5. Das Bestimmen der Flächen und Momente von geschlossenen Kurven

In der Praxis kommt es häufig vor, dass die zu integrierende Kurve geschlossen ist. Sie ist ein Querschnitt eines Balkens, einer Schiene, einer Tragfläche usw. Will man eine geschlossene Kurve integrieren, so kann man sich vorstellen, dass diese Kurve aus zwei Ästen bestehe. Man könnte nun jeden Ast einzeln integrieren, die Differenz der Einzelergebnisse ergäbe dann das Resultat. Wenn man die geschlossene Kurve in einem Zuge umfährt, bildet der Integrator diese Differenz selber. Interessiert man sich nicht nur für die Momente der geschlossenen Fläche in bezug auf eine bestimmte Achse, sondern in bezug auf irgend eine beliebige Achse, so hat man die Kurve mit dem Fahrstift anderthalbmal zu umfahren (vgl. *Abb. 5a*). Die Kurve wurde von 0 ausgehend in der Richtung der Pfeile umfahren, derart dass man folgenden Weg zurücklegte: 0-1-2-3-4-1-0-1-2-3. Das Stück 0-1 wurde dazu genommen, damit man die Momente auch für Achsen bestimmen kann, die ausserhalb der Fläche zwischen 1 und 0 hindurchgehen.

Der Integrator zeichnet dann drei ineinander übergehende Kurvenzüge, nämlich:

Flächen

$$0'-1'-2'-3', \quad 3'-4'-1'-\bar{0}', \quad \bar{0}'-\bar{1}'-\bar{2}'-\bar{3}'.$$

Die Ordinatendifferenzen dieser Kurven müssen nach Nr. 4 entsprechenden Flächen aus der Grundfigur proportional sein. Wir bezeichnen mit dem Symbol $2'-4'$ die Strecke (Ordinaten-differenz) zwischen $2'$ und $4'$, λ sei, wie immer, die Basis der Integration.

Dann ist:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (2'-4') &= \text{Fläche } F_1, \\ \lambda \cdot (4'-\bar{2}') &= \text{Fläche } F_2, \\ \lambda \cdot (2'-\bar{2}') &= \text{Gesamtfläche } F_1 + F_2. \end{aligned}$$

Benutzen wir die ersten Integralkurven als neue Grundkurven, so erhalten wir die in *Abbildung 5a* mit zwei Akzenten bezeichneten Kurven, die sinngemäss durchnummeriert sind. Wir erwarten, dass diese Kurven uns gestatten, die statischen Momente der Grundfigur zu bestimmen.

Statische Momente

Es ist:

$$\begin{aligned} \lambda^2(2''-4'') &= \text{statisches Moment der Fläche } F_1, \\ \lambda^2(\bar{2}''-4'') &= \text{statisches Moment der Fläche } F_2, \\ \lambda^2(2''-\bar{2}'') &= \text{statisches Moment der Gesamtfläche.} \end{aligned}$$

Alle diese Momente beziehen sich auf die Achse 2-4.

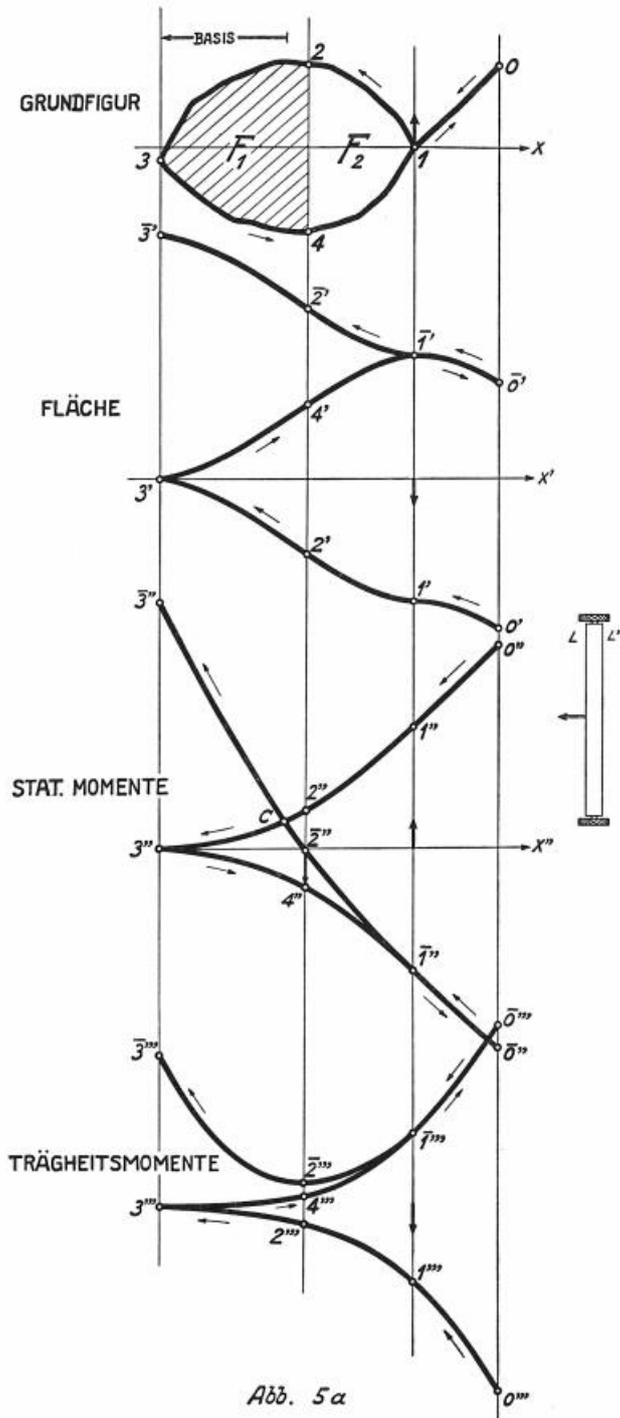


Abb. 5a

GESCHLOSSENE KURVE, FLÄCHE, STATISCHE MOMENTE, TRÄGHEITSMOMENTE

Dort wo die Anfangskurve $0''-1''-2''-3''$ die Schlusskurve $\bar{0}''-\bar{1}''-\bar{2}''-\bar{3}''$ schneidet, befindet sich der Punkt C. Für eine Achse, die durch diesen Punkt geht, verschwindet das statische Moment. Es ist also eine Achse, die durch den Schwerpunkt der Grundfigur geht. Nun genügt es, die Grundkurve noch in einer andern Richtung zu integrieren, um eine weitere Schwerlinie zu erhalten. Damit wäre der Schwerpunkt dann vollständig bestimmt (vgl. *Abschnitt 9* und *Abb. 9*). Schwerpunkt

Eine Integration der doppelt akzentuierten Kurven ergibt das Kurvensystem, das durch drei Akzente ausgezeichnet ist. Dieses System liefert uns die Möglichkeit, die Trägheitsmomente der Grundfigur zu bestimmen. Trägheitsmomente

Es ist :

$$2\lambda^3(2'''-4''') = \text{Trägheitsmoment der Fläche } F_1,$$

$$2\lambda^3(4'''-\bar{2}''') = \text{Trägheitsmoment der Fläche } F_2,$$

$$2\lambda^3(2'''-\bar{2}''') = \text{Trägheitsmoment der Gesamtfläche.}$$

Alle diese Momente beziehen sich wieder auf die Achse 2-4. Das Trägheitsmoment für eine Achse durch 0 wäre etwa gegeben durch :

$$2\lambda^3(0'''-\bar{0}''').$$

Auch das Vorzeichen der einzelnen Grössen lässt sich zweifelsfrei bestimmen. Es sei das Vorzeichen des statischen Momentes der Fläche F_2 gesucht. Eine vom Umfassungssinn und vom Koordinatensystem unabhängige Vorzeichenbestimmung ist folgende : Vorzeichen der Momente

Die Grösse der Fläche F_2 wird gegeben durch die Strecke $\bar{2}'-4'$. Wir setzen fest, dass alle Flächen positiv gezählt werden sollen. Die Richtung von $\bar{2}'$ nach $4'$ wählen wir dann als positive Bezugsrichtung. Da die Integration mit einer nach negativen x weisenden Basis erfolgte, so hat man diese Bezugsrichtung bei jeder Integration umzukehren. Sie ist dann am nebenstehenden Pfeilsinn abzulesen. Die Richtung von $\bar{2}''$ nach $4''$ ist nun dem Pfeil entgegengesetzt. Somit ist das statische Moment der Fläche F_2 negativ zu zählen.

Die Grösse der Basis entscheidet über den Masstab der Integralkurven. Um günstige Verhältnisse zu bekommen, ist folgende Faustregel nützlich : Wahl der Basis

Man wähle die Basis λ ungefähr gleich $\frac{3}{4}\sqrt{ab}$. Hierin bedeutet a die mittlere Länge und b die mittlere Breite der Figur.

Ist die Figur nach einer Richtung hin stark gedehnt, so ist es zweckmässig, sie in dieser Richtung zu verkürzen oder in der andern zu strecken.

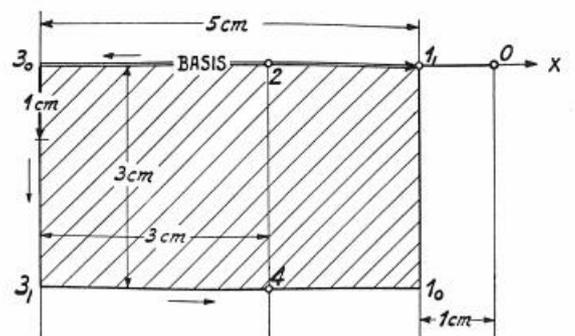
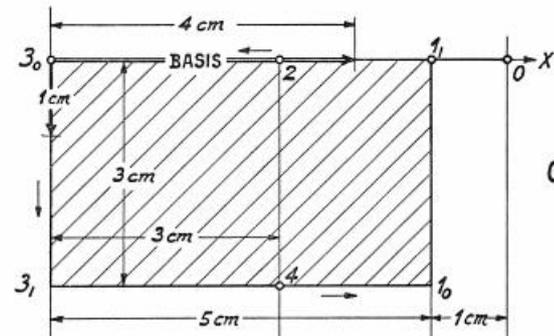
Es ist zu empfehlen, das Umfahren einer geschlossenen Figur immer an einem äussersten Ende zu beginnen, damit die Integralkurven nicht mit unnötigen Umkehrspitzen behaftet werden. Wahl des Anfangspunktes

Zum bessern Verständnis sei noch ein numerisches Beispiel angegeben. Numerisches Beispiel

Als Grundfigur ist ein Rechteck gewählt, dessen Breite = 3 cm und dessen Länge = 5 cm misst. Das Rechteck ist in *Abbildung 5b* und *5c* in natürlicher Grösse gezeichnet. Die Integralkurven sind in richtigem Masstab gedruckt, so dass an ihnen direkt gemessen werden kann. Damit man den Einfluss der Basis anschaulich sieht, ist das gleiche Rechteck einmal mit der Basis $\lambda = 4$ cm und das andere Mal mit der Basis $\lambda = 5$ cm integriert. Die Ergebnisse sind in zwei Tabellen zusammengestellt ; zum Vergleich stehen auch die berechneten Werte daneben. Bei der Beurteilung der Genauigkeit darf man nicht vergessen, dass es sich hier um reproduzierte Kurven handelt. Die Genauigkeit liegt bei Originalkurven um $\frac{1}{2}$ % herum ; sie hängt auch von der Kurvenform ab,

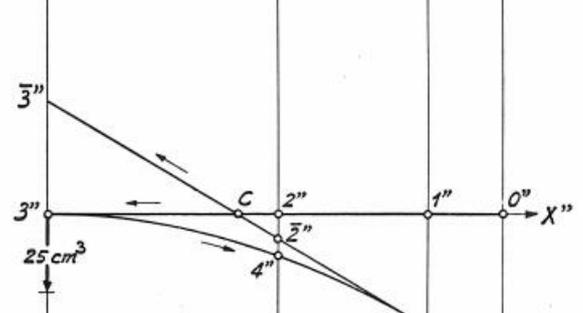
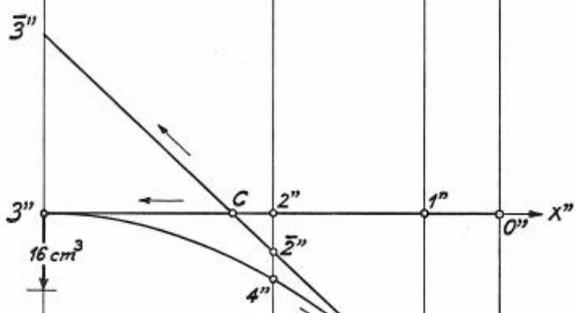
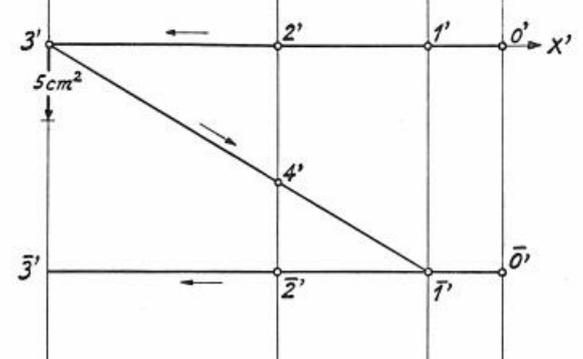
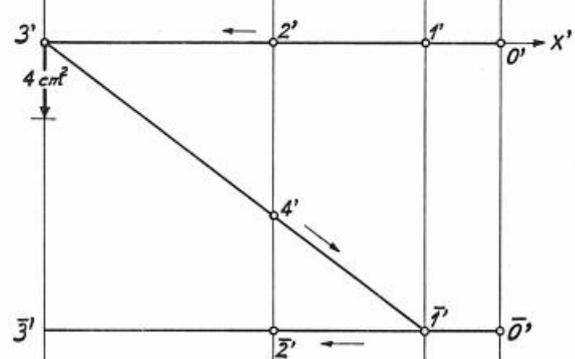
BASIS = 4 cm

BASIS = 5 cm

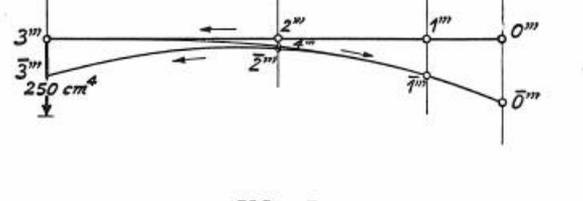
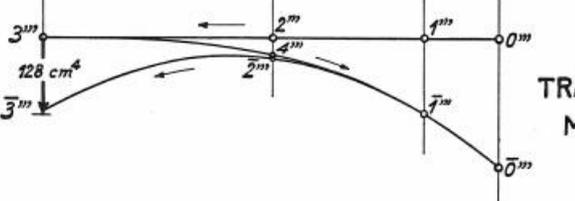


GRUNDFIGUR

FLÄCHE



STAT. MOMENT



TRÄGHEITSMOMENT

Abb. 5b

Abb. 5c

NUMERISCHES BEISPIEL: RECHTECKE, FLÄCHEN, STATISCHE MOMENTE, TRÄGHEITSMOMENTE

TABELLE ZU ABBILDUNG 5b

TABELLE ZU ABBILDUNG 5c

Teilfläche 2-3₀-3₁-4,
Momente bezüglich der Achse durch Punkt 2

Gesamtfläche,
Momente bezüglich Achse durch Punkt 0

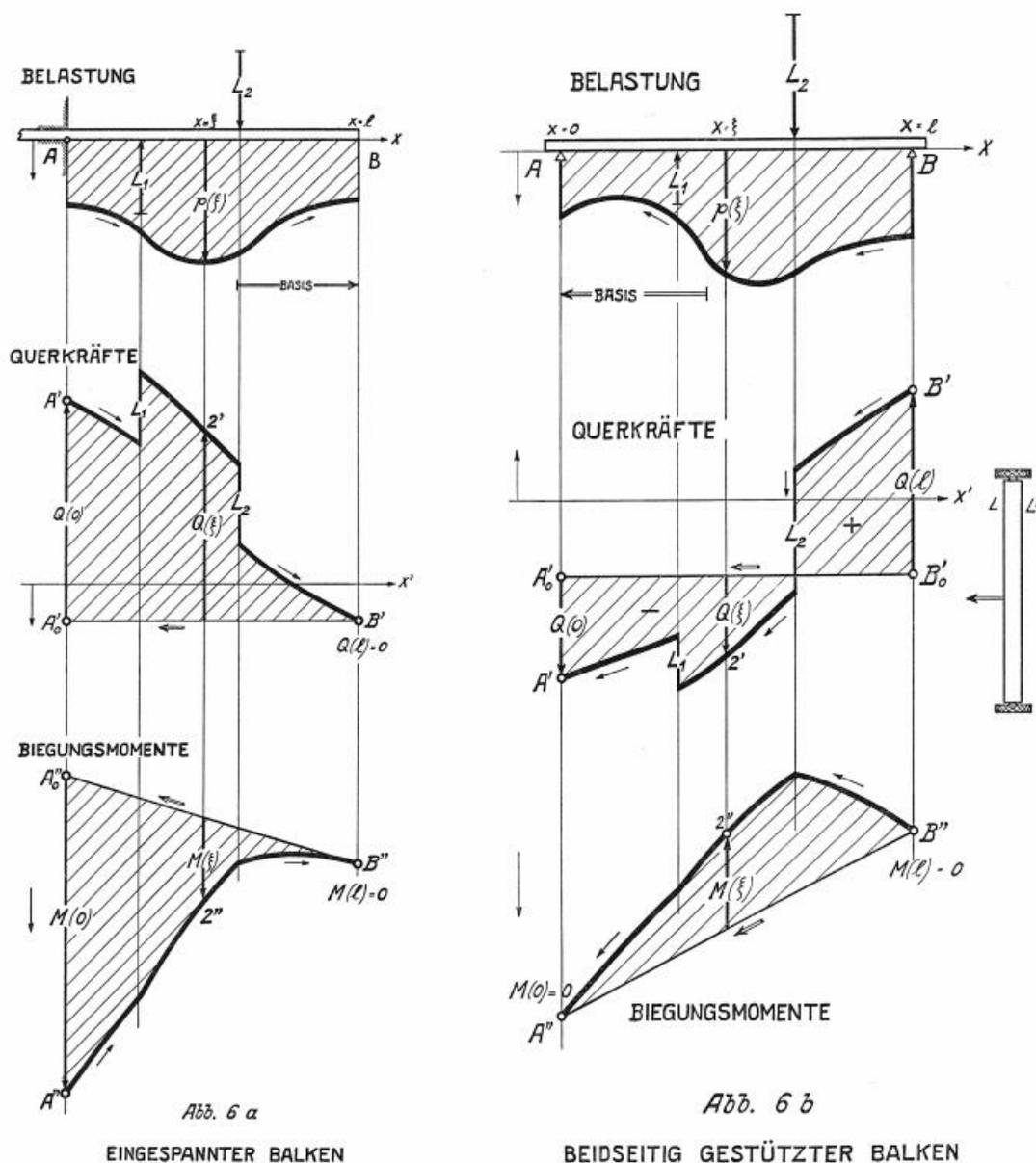
| Basis | Aus der Zeichnung entnommen | Berechnet | Basis | Aus der Zeichnung entnommen | Berechnet |
|--------------------------|---|---------------------------------|--|--------------------------------------|---------------------------------|
| $\lambda = 4 \text{ cm}$ | $2' - 4' = 2,25 \text{ cm}$ | FLÄCHE STATISCHES MOMENT | $\lambda = 4 \text{ cm}$ | $0' - \bar{0}' = 3,8 \text{ cm}$ | FLÄCHE STATISCHES MOMENT |
| $\lambda = 5 \text{ cm}$ | $\lambda (2' - 4') = 9,0 \text{ cm}^2$ | | $\lambda (0' - \bar{0}') = 15,2 \text{ cm}^2$ | | |
| | $2' - 4' = 1,8 \text{ cm}$ | | $0' - \bar{0}' = 3,0 \text{ cm}$ | | |
| | $\lambda (2' - 4') = 9,0 \text{ cm}^2$ | | $\lambda (0' - \bar{0}') = 15,0 \text{ cm}^2$ | | |
| $\lambda = 4 \text{ cm}$ | $2'' - 4'' = 0,87 \text{ cm}$ | FLÄCHE STATISCHES MOMENT | $\lambda = 4 \text{ cm}$ | $0'' - \bar{0}'' = 3,25 \text{ cm}$ | FLÄCHE STATISCHES MOMENT |
| $\lambda = 5 \text{ cm}$ | $\lambda^2 (2'' - 4'') = 13,9 \text{ cm}^3$ | | $\lambda^2 (0'' - \bar{0}'') = 52,0 \text{ cm}^3$ | | |
| | $2'' - 4'' = 0,55 \text{ cm}$ | | $0'' - \bar{0}'' = 2,1 \text{ cm}$ | | |
| | $\lambda^2 (2'' - 4'') = 13,7 \text{ cm}^3$ | | $\lambda^2 (0'' - \bar{0}'') = 52,5 \text{ cm}^3$ | | |
| $\lambda = 4 \text{ cm}$ | $2''' - 4''' = 0,22 \text{ cm}$ | TRÄGHEITSMOMENT | $\lambda = 4 \text{ cm}$ | $0''' - \bar{0}''' = 1,7 \text{ cm}$ | TRÄGHEITSMOMENT |
| $\lambda = 5 \text{ cm}$ | $2 \lambda^3 (2''' - 4''') = 28,0 \text{ cm}^4$ | | $2 \lambda^3 (0''' - \bar{0}''') = 218 \text{ cm}^4$ | | |
| | $2''' - 4''' = 0,11 \text{ cm}$ | | $0''' - \bar{0}''' = 0,85 \text{ cm}$ | | |
| | $2 \lambda^3 (2''' - 4''') = 27,5 \text{ cm}^4$ | | $2 \lambda^3 (0''' - \bar{0}''') = 212 \text{ cm}^4$ | | |

Bei der Auswertung der Kurven hat man sich auf die Momente bezüglich der Achsen durch die Punkte 2 und 0 beschränkt.

Der Vollständigkeit halber ist in jeder Figur noch angegeben, was 1 cm Ordinatenlänge darstellt.

6. Querkräfte und Biegemomente eines belasteten Balkens

Es sei AB (Abb. 6a) ein belasteter Balken, der in A eingespannt ist und auf den eine kontinuierliche Last und Einzellasten wirken. Die kontinuierliche Last werde durch die Belastungsfunktion $p(x)$ gegeben. Die noch unbekannte Auflagerkraft in A heisse P_A . Die Einzellasten L_i wirken an den Stellen x_i .



Die *Querkraft* an der Stelle $x = \xi$ die von dem links von ξ liegenden Teil ausgeübt wird, berechnet sich nach der Formel: Querkraft

$$Q(\xi) = P_A - \int_0^{\xi} p(x) dx - \sum_{x_i < \xi} L_i.$$

Die Querkraft erhält man also durch Integration der Belastungsfunktion. Um dabei auch die Einzellasten zu berücksichtigen, braucht man nur an den Stellen, wo diese wirken, den Wagen W' des Integraphen um den Betrag der Einzellast zu verschieben. Wirkt die Einzellast im Sinne der kontinuierlichen Last, so verschiebt man den Wagen in der Richtung, in der er sich zufolge dieser kontinuierlichen Last bewegt. (Bei entgegengesetzt wirkender Last entsprechend umgekehrt.) Man erhält so eine unstetige Kurve $A' 2' B'$. Da hier die Auflagerkraft P_A noch unbekannt ist, weiss man zunächst nicht, von wo aus die Querkräfte zu messen sind. Nun ist aber in unserem Fall die Querkraft am freien Ende B gleich null. Die Querkräfte müssen daher von der Horizontalen durch den Punkt B' aus gemessen werden. Insbesondere ist $\lambda \cdot (A'_0 - A') = Q(0)$ die Auflagerkraft P_A in A .

Das *Biegemoment* an der Stelle $x = \xi$ ist:

$$M(\xi) = M(0) - \int_0^{\xi} (\xi - x) p(x) dx - \sum_{x_i < \xi} L_i (\xi - x_i).$$

Biegemoment

Hierin bedeutet $M(0)$ das Einspannmoment in A ; die zwei letzten Glieder können als statisches Moment der Belastungsfunktion aufgefasst werden. Wir erhalten diese Glieder, indem wir die Querkraftfunktion integrieren:

$$M(\xi) = M(0) - \int_0^{\xi} Q(x) dx.$$

Hierin sind die Einzellasten mitberücksichtigt. In unserem Fall ist das Einspannmoment $M(0)$ noch unbekannt. Wir überlegen nun folgendermassen: Die Querkraftfunktion setzt sich aus der Kurve $A' 2' B'$ und der Horizontalen durch B' zusammen. Integriert ergibt sich aus $A' 2' B'$ die Kurve $A'' 2'' B''$; die Horizontale hat als Integral eine schiefe Gerade. Das Biegemoment muss zwischen beiden Kurven gemessen werden. Die gegenseitige Lage dieser Kurven bestimmt sich nun durch die Forderung, dass das Biegemoment am Ende B verschwindet. Infolgedessen muss die Gerade durch den Punkt B'' gehen. Das Biegemoment an der Stelle $x = \xi$ wird durch die Strecke $M(\xi)$ gemessen; insbesondere ist $\lambda^2 (A''_0 - A'')$ gleich dem Einspannmoment $M(0)$. Mit dem Integraphen ergeben sich die geforderten Verhältnisse, indem man die Querkraftfunktion (einschliesslich der Horizontalen) von A' beginnend einmal umfährt.

Als ein weiteres Beispiel behandeln wir noch den in A und B gestützten Balken (*Abb. 6b*). Es seien wieder $p(x)$ die Belastungsfunktion und L_i die Einzellasten. Der Unterschied gegenüber dem ersten Beispiel liegt darin, dass nach der ersten Integration die Querkräfte noch nicht absolut bestimmbar sind; wir müssen zuerst nochmals integrieren und erhalten so die Kurve $A'' 2'' B''$. Nun weiss man aber, dass die Biegemomente sowohl in A als auch in B null sind; die Verbindungsgerade $A'' B''$ umschliesst daher mit der Kurve $A'' 2'' B''$ zusammen die Momentenfläche. Die Gerade $A'' B''$ ist aber die Integralkurve einer horizontalen Geraden $A'_0 B'_0$ im Querkraftdiagramm. Diese Gerade sucht man mit dem Integraphen herauszufinden

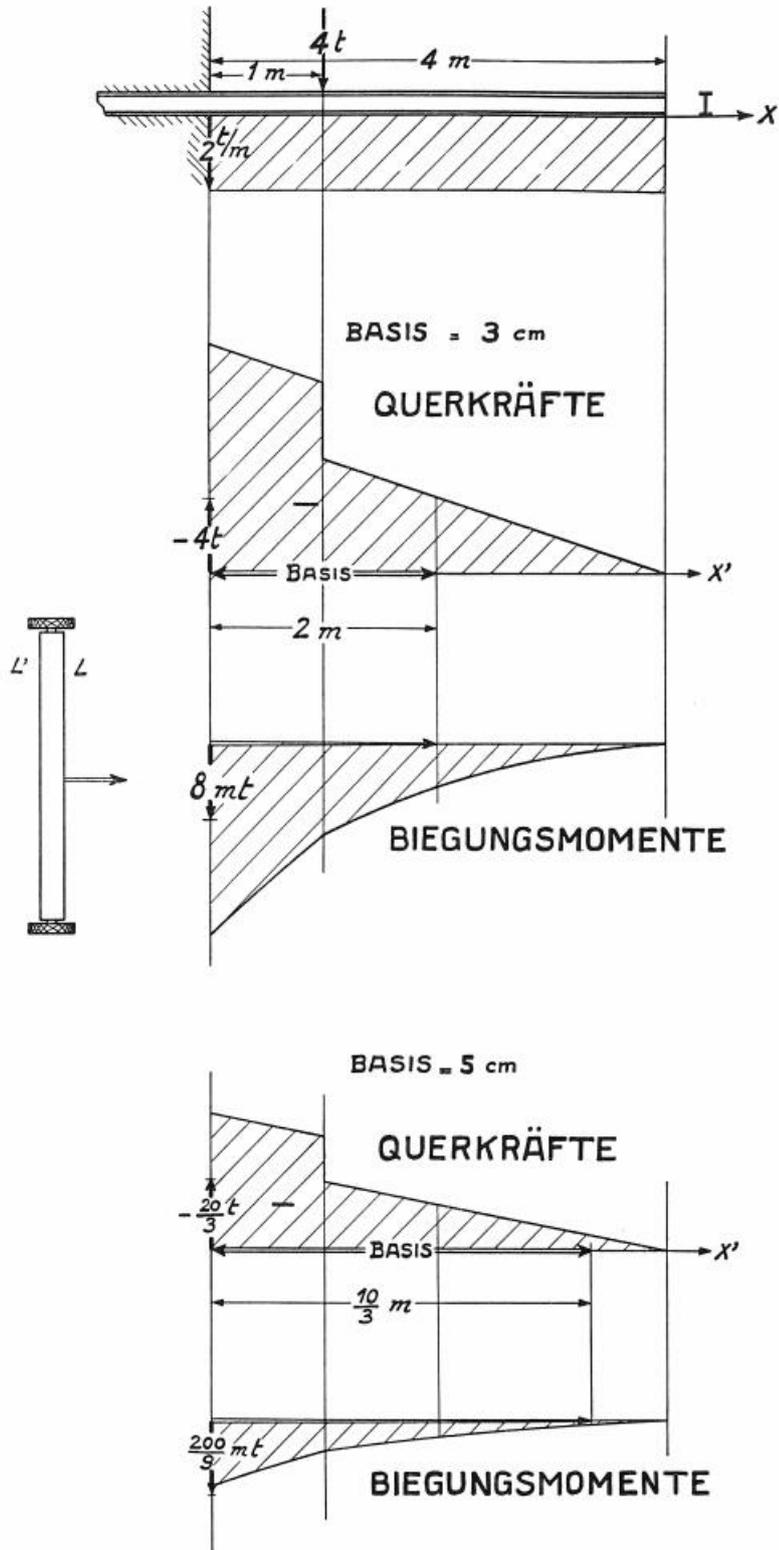


Abb. 6 c

NUMERISCHES BEISPIEL: EINGESPANNTER BALKEN

indem man den Integrativen so führt, dass er die schräge Gerade zeichnet. $A_0 B_0$ stellt dann die Achse dar, von der aus man die Querkräfte zu messen hat.

Wieder diene ein numerisches Beispiel der Klärung.

Es sei ein einseitig eingespannter 4 m langer Balken gegeben, der pro Meter 2 Tonnen wiegt und auf den im ersten Viertel eine Last von 4 Tonnen wirkt (Abb. 6c).

Eine Abszisse von 3 cm im Belastungsbild entspricht in Wirklichkeit 2 m. 1 cm Ordinate dagegen stellen 2 t/m dar. Die Basis der Integration ist in der Richtung der Abszisse zu messen und beträgt 3 cm (bzw. 5 cm). In Wirklichkeit misst sie daher 2 m (bzw. 10/3 m).

Für die erste Integralkurve stellt 1 cm Ordinatenlänge 4 t dar: denn es ist Ordinaten-differenz im Masstab der Grundkurve mal Basis = $(2 \text{ t/m}) \cdot (2 \text{ m}) = 4 \text{ t}$. Für die zweite Integralkurve (Biegemomente) stellt 1 cm Ordinatenlänge 8 mt dar. Nämlich: $(2 \text{ t/m}) \cdot (2 \text{ m})^2 = 8 \text{ mt}$.

Die Querkraft in der Mitte des Balkens ist nach Rechnung = 4 t. Auf der Zeichnung messen wir 1 cm, also auch gleich 4 t.

Das Biegemoment in der Mitte errechnen wir zu 4 mt. Man misst in der Zeichnung 0,5 cm; das sind 4 mt.

Analog liegen die Verhältnisse bei der Zeichnung mit der Basis 5 cm, die in Wirklichkeit 10/3 m entspricht. In der *Abbildung 6c* sind immer die wahren Werte für die Ordinatenlänge 1 cm angegeben.

Auf Grund der Ausführungen lassen sich alle verwandten Probleme lösen, wie Berechnungen von Brücken, Tragflächen usw.

7. Die elastische Linie

Die elastische Linie $\eta = \eta(x)$ eines belasteten Balkens berechnet sich aus der Gleichung:

$$\eta''(x) = \frac{M(x)}{J \cdot E}$$

$M(x)$ ist das Biegemoment der wirkenden Kräfte an der Stelle x , J bedeutet das Trägheitsmoment des Querschnittes und E ist der Elastizitätsmodul des Materials. η wird also durch zweimalige Integration der Funktion $M(x)/JE$ erhalten (Abb. 7).

Man trägt in irgend einem Masstab die Funktion $M(x)/JE$ auf. Die dadurch erhaltene Kurve integriert man zweimal. Hier ist es besonders wichtig, bei jeder Integration auf die Auflagerverhältnisse zu achten, da bei den Auflagern die Größen η und η' bestimmte Werte annehmen müssen, die die Lage des Schreibstiftes des Integrativen bestimmen. In unserem Beispiel (einseitig eingespannter Balken) ist für $x = 0$ auch $\eta' = 0$ und $\eta = 0$.

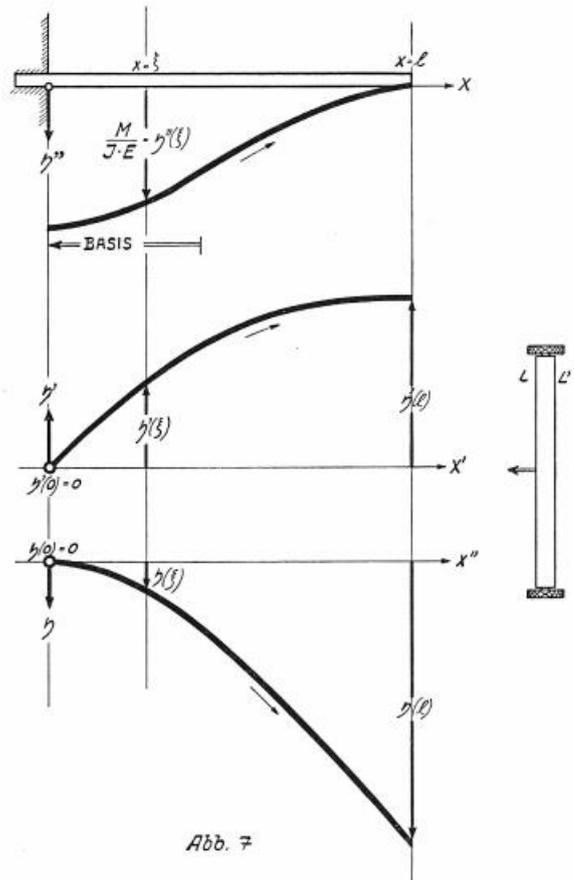


Abb. 7

ELASTISCHE LINIE

8. Das Auflösen von algebraischen Gleichungen

Der Integraph kann in sehr einfacher Weise dazu benützt werden, algebraische Gleichungen höhern Grades aufzulösen. Es sei etwa :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

gegeben. Die Lösungen dieser Gleichung sind die Nullstellen der Funktion :

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 .$$

Unser Problem ist gelöst, wenn es gelingt, diese Funktion graphisch darzustellen.

Wir differenzieren die Funktion n mal und erhalten :

$$\begin{aligned} y' &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 , \\ y'' &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2 a_2 . \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n . \end{aligned}$$

Jede dieser Funktionen ist das Integral der nachfolgenden. Die letzte $y^{(n)}$ stellt eine Parallele zur x -Achse dar und kann also leicht gezeichnet werden. Alle andern erhält man dann durch aufeinanderfolgendes Integrieren. Es ist :

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int y^{(n)} dx , \\ &\vdots \\ y &= \int y' dx . \end{aligned}$$

Bei diesen Integrationen ist besonders darauf zu achten, dass jede Funktion für $x=0$ einen bestimmten Wert hat, durch den die Lage der x -Achse für die nächste Integration festgelegt wird.

Wählt man als Basis die Länge λ , so muss man bei jeder Differentiation mit λ multiplizieren, so dass man folgendes Funktionenschema erhält :

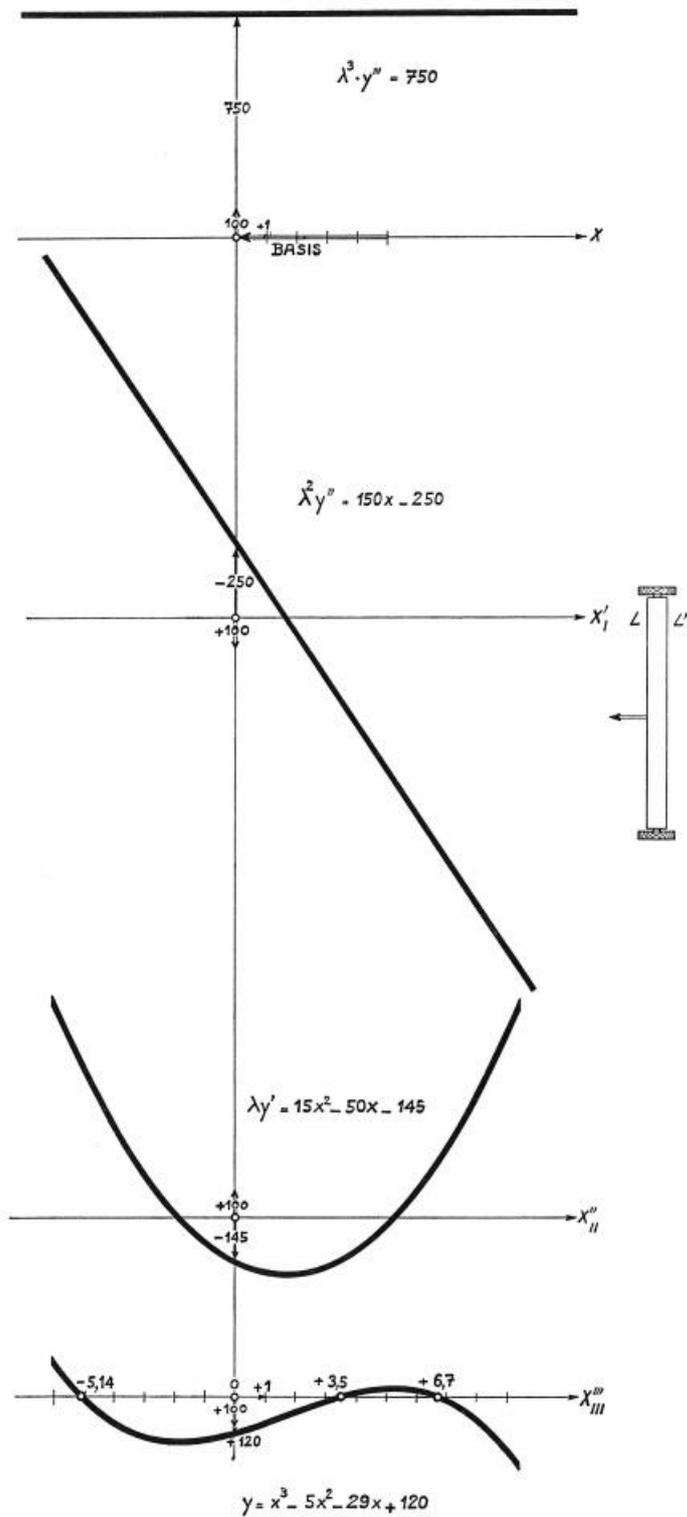
$$\begin{aligned} \lambda y' &= \lambda (n a_n x^{n-1} + \dots + a_1) , \\ \lambda^2 y'' &= \lambda^2 (n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots + 2 a_2) , \\ &\vdots \\ \lambda^n y^{(n)} &= \lambda^n n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n . \end{aligned}$$

Der Ordinatenmasstab ist beliebig wählbar ; jedoch muss er für das ganze Funktionenschema beibehalten werden. Die Grösse der Wurzeln wird mit den Teilen der Basis gemessen. Wir geben folgendes Beispiel :

Man soll die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 29x + 120 = 0$$

bestimmen.



NULLSTELLEN: $x_1 = -5,14$, $x_2 = +3,5$, $x_3 = +6,7$

Abb. 8

DIE NULLSTELLEN EINER ALGEBRAISCHEN FUNKTION

Wir teilen die Basis in 5 Teile und stellen infolgedessen das Schema auf :

$$\begin{aligned}y &= x^3 - 5x^2 - 29x + 120, \\ \lambda y' &= 15x^2 - 50x - 145, \\ \lambda^2 y'' &= 150x - 250, \\ \lambda^3 y''' &= 750.\end{aligned}$$

Das Integral der letzten Funktion ist eine schräge Gerade (*Abb. 8*). Diese soll für $x = 0$ den Wert -250 haben. Diesen Wert trägt man auf der Ordinatenachse im richtigen Masstab auf. In der Abbildung ist die positive Richtung der Ordinatenachse jeweils mit einem Doppelpfeil ausgezeichnet. Diese Richtung wechselt in unserem Beispiel immer, weil die Basis entgegen der x -Achse gerichtet ist (vgl. Nr. 3). Nachdem in der ersten integrierten Funktion die x -Achse eingezeichnet ist, kann diese Funktion weiter integriert werden. Aus der Abbildung ersieht man alles Nötige. Nach drei Integrationen erhält man die gesuchte Funktion, die an den Stellen

$$x_1 = -5,14, \quad x_2 = +3,5, \quad x_3 = +6,7$$

verschwindet.

9. Deviationsmoment und höhere Momente

Deviations-
moment

Bei gewissen Fragen spielt das Deviations- oder Zentrifugalmoment C_{xy} eine wichtige Rolle. Es ist definiert durch das Integral :

$$C_{xy} = \int \int xy \, dx \, dy = \int xy \, df,$$

wobei das Integral über die ganze Fläche zu erstrecken ist. Man kann auch dieses Integral mit dem Integraphen lösen. Zu solchem Zweck führen wir ein neues Koordinatensystem u, v ein, das gegen das alte um 45° gedreht ist. Die alten Koordinaten sind dann mit den neuen durch die Beziehung :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$$

verknüpft.

Das Deviationsmoment lässt sich damit schreiben :

$$C_{xy} = \int xy \, df = \frac{1}{2} \int (u^2 - v^2) \, df = \frac{1}{2} \int u^2 \, df - \frac{1}{2} \int v^2 \, df.$$

Das Integral $\int u^2 \, df = J_v$ stellt nun nichts anderes dar, als das Trägheitsmoment der Fläche in bezug auf die v -Achse. Entsprechend ist $\int v^2 \, df = J_u$ das Trägheitsmoment der Fläche bezüglich der u -Achse.

Um C_{xy} mit dem Integraphen zu bestimmen, hat man den Apparat nur um 45° zu drehen, so dass seine Richtung in die u -Achse zu liegen kommt, und bestimmt das Trägheits-

moment J_v nach den Angaben aus Nr. 5. Hierauf dreht man den Apparat um 90° und bestimmt J_u . Aus J_v und J_u berechnet sich das Deviationsmoment nach der Formel:

$$C_{xy} = \frac{1}{2}(J_v - J_u).$$

Nach derselben Methode lassen sich auch höhere gemischte Momente bestimmen, etwa von der Form: $M_{xxy} = \int xy^2 df$.

Höhere
gemischte
Momente

Wir bilden:

$$\sqrt{2}(u^3 - v^3) = \frac{1}{2}(x + y)^3 - \frac{1}{2}(y - x)^3 = x^3 + 3xy^2.$$

Daraus entnehmen wir:

$$xy^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(u^3 - v^3) - \frac{x^3}{3}.$$

Damit erhalten wir für

$$M_{xxy} = \int xy^2 df = \frac{\sqrt{2}}{3} \int u^3 df - \frac{\sqrt{2}}{3} \int v^3 df - \frac{1}{3} \int x^3 df = \frac{\sqrt{2}}{3}(M_{3v} - M_{3u}) - \frac{1}{3}M_{3y},$$

wenn $M_{3v} = \int u^3 df$, $M_{3u} = \int v^3 df$ und $M_{3y} = \int x^3 df$ gesetzt wird. Diese Integrale sind durch die vierten Integralkurven direkt gegeben.

Abbildung 9 gibt ein Beispiel, wie diese gemischten Momente mit dem Integraphen bestimmt werden. Man integriert die gegebene Figur in bezug auf 4 Richtungen je 4 mal. Jede Richtung ist gegen die vorhergehende um 45° gedreht. Es ist vorteilhaft, beim Integrieren immer mit einem äusseren Punkt zu beginnen. Die Punkte 1, 2, 3, 4 sind für je eine Richtung solche Stellen und dienen bei den entsprechenden Integrationen als Anfangspunkte. Wir werten nun die Integralkurven bezüglich Achsen aus, die durch einen beliebigen Punkt 0 gehen. Die gemessenen Werte und die daraus berechneten Momente sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Die Vorzeichen bestimmen wir so, dass die Flächen positiv werden; wir benutzen also den Pfeil im Flächendiagramm als Bezugspeil.

Numerisches
Beispiel

Im weitem bestimmen wir auch noch den Schwerpunkt S der Figur, indem wir durch die Punkte C_y, C_v, C_x, C_u die Achsen ziehen, die sich alle in S schneiden müssen (vgl. Nr. 5). Eine zweite Tabelle gibt die Werte der Momente für die Achsen durch den Schwerpunkt.

Wir entnehmen aus Tabelle 1:

$$J_v = 5,15 \text{ cm}^4; \quad J_u = 1,75 \text{ cm}^4.$$

Daraus erhält man für das Deviationsmoment C_{xy}

$$C_{xy} = \frac{1}{2}(J_v - J_u) = 2,2 \text{ cm}^4.$$

Ferner ergibt sich für:

$$\begin{aligned} M_{xxy} &= \frac{\sqrt{2}}{3}(M_{3v} - M_{3u}) - \frac{1}{3}M_{3y}, \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}(-8,8 \text{ cm}^5 - 2,34 \text{ cm}^5) - \frac{1}{3}(-10,4 \text{ cm}^5), \\ &= -1,79 \text{ cm}^5. \end{aligned}$$

BEZEICHNUNGEN UND MASSE

| | | |
|------------------------------------|---|-------------------------|
| F · FLÄCHE |  | = 1,25 cm ² |
| M · STAT. MOMENT |  | = 1,56 cm ³ |
| J · TRÄGHEITSMOMENT |  | = 3,91 cm ⁴ |
| ³ M · MOMENT 3. ORDNUNG |  | = 14,65 cm ⁵ |

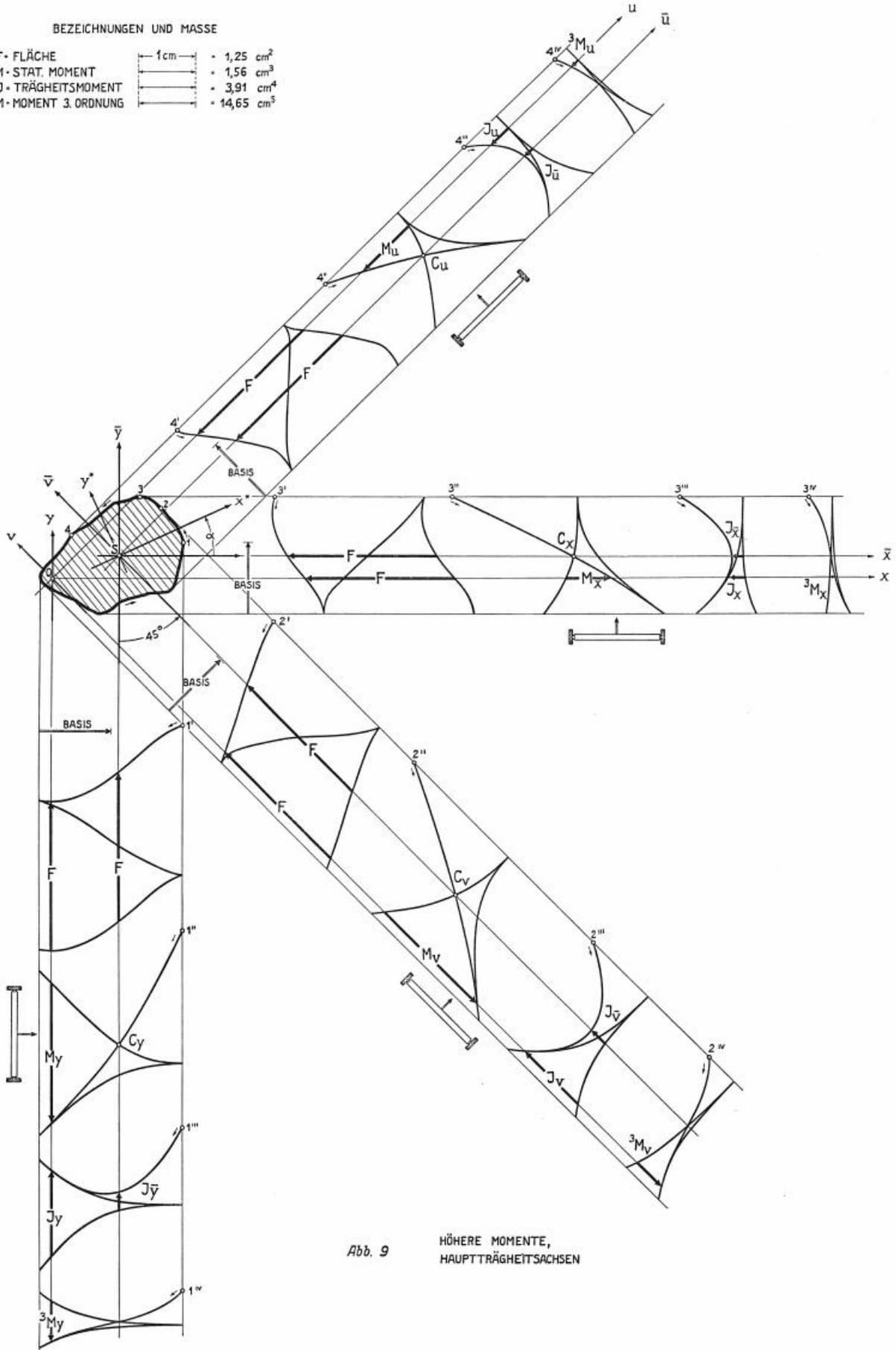


Abb. 9

HÖHERE MOMENTE,
HAUPTTRÄGHEITSACHSEN

TABELLE 9a

TABELLE 9b

Auswertung der Abbildung für die Momente bezüglich der Achsen durch Punkt 0 **Auswertung der Abbildung 9 für die Momente bezüglich Achsen durch den Schwerpunkt**

| Achsen | Gesamtfläche | Stat. Momente | Trägheitsmomente | Momente 3. Ordnung | Achsen | Gesamtfläche | Stat. Momente | Trägheitsmomente | Momente 3. Ordnung |
|-------------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| Abgelesene Werte | | | | | Abgelesene Werte | | | | |
| y | 2,62 cm | -2,50 cm | 1,52 cm | -0,71 cm | \bar{y} | 2,62 cm | 0,00 cm | 0,32 cm | 0,00 cm |
| v | 2,62 | -2,30 | 1,32 | -0,60 | \bar{v} | 2,62 | 0,00 | 0,33 | 0,00 |
| x | 2,62 | -0,81 | 0,32 | -0,10 | \bar{x} | 2,62 | 0,00 | 0,20 | 0,00 |
| u | 2,62 | 1,15 | 0,45 | 0,16 | \bar{u} | 2,62 | 0,00 | 0,19 | 0,00 |
| Multiplikator | $\lambda =$ | $\lambda^2 =$ | $2 \lambda^3 =$ | $6 \lambda^4 =$ | Multiplikator | λ | λ^2 | $2 \lambda^3$ | $6 \lambda^4$ |
| | 1,25 cm | 1,56 cm ² | 3,91 cm ³ | 14,65 cm ⁴ | | 1,25 cm | 1,56 cm ² | 3,91 cm ³ | 14,65 cm ⁴ |
| Wahre Werte | | | | | Wahre Werte | | | | |
| y | 3,28 cm ² | -3,90 cm ³ | 5,95 cm ⁴ | -10,4 cm ⁵ | \bar{y} | 3,28 cm ² | 0,00 cm ³ | 1,25 cm ⁴ | 0,00 cm ⁵ |
| v | 3,28 | -3,59 | 5,15 | -8,80 | \bar{v} | 3,28 | 0,00 | 1,29 | 0,00 |
| x | 3,28 | -1,26 | 1,25 | -1,46 | \bar{x} | 3,28 | 0,00 | 0,78 | 0,00 |
| u | 3,28 | 1,80 | 1,75 | 2,34 | \bar{u} | 3,28 | 0,00 | 0,74 | 0,00 |

10. Hauptträgheitsachsen

Es kommt hin und wieder vor, dass man von einem Querschnitt die Hauptachsenrichtungen x^* und y^* kennen möchte. Diese können bekanntlich dann berechnet werden, wenn man in bezug auf ein Achsenkreuz \bar{x} , \bar{y} durch den Schwerpunkt die Trägheitsmomente $J_{\bar{x}}$ und $J_{\bar{y}}$ sowie das Deviationsmoment $C_{\bar{x}\bar{y}}$ kennt. Nach Nr. 9 lassen sich diese Momente mit dem Integraphen bestimmen. Der Winkel α , unter dem die Hauptträgheitsachsen x^* und y^* gegen die Achsen \bar{x} , \bar{y} geneigt sind, lässt sich nach der Formel¹ berechnen:

Hauptachsen-
richtung

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C_{\bar{x}\bar{y}}}{J_{\bar{y}} - J_{\bar{x}}} = \frac{J_{\bar{v}} - J_{\bar{u}}}{J_{\bar{y}} - J_{\bar{x}}}.$$

Die Hauptträgheitsmomente sind dann:

Hauptträg-
heitsmomente

$$\begin{aligned} J_{x^*}, J_{y^*} &= \frac{1}{2} \left(J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}} \pm \sqrt{(J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}})^2 + 4C_{\bar{x}\bar{y}}^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(J_{\bar{y}} + J_{\bar{x}} \pm \sqrt{(J_{\bar{y}} - J_{\bar{x}})^2 + (J_{\bar{v}} - J_{\bar{u}})^2} \right). \end{aligned}$$

Aus der Tabelle 2 würde für die *Abbildung 9* hervorgehen:

$$J_y = 1,25 \text{ cm}^4, \quad J_x = 0,78 \text{ cm}^4, \quad J_v = 1,29 \text{ cm}^4, \quad J_u = 0,74 \text{ cm}^4.$$

Daraus finden wir:

$$\begin{aligned} C_{\bar{x}\bar{y}} &= 0,28 \text{ cm}^4, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= 1,17, & \alpha &= 24^\circ 45' \text{ (bzw. } 114^\circ 45') \\ J_{x^*}, J_{y^*} &= 1,38 \text{ cm}^4; 0,65 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

In unserem Fall ist J_{y^*} das grösste Trägheitsmoment, also

$$J_{y^*} = 1,38 \text{ cm}^4, \quad J_{x^*} = 0,65 \text{ cm}^4.$$

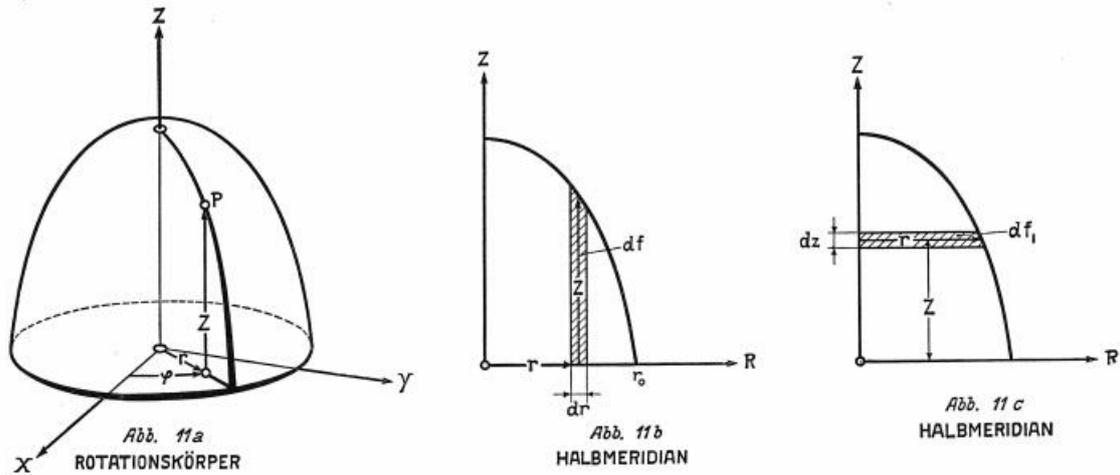
11. Rotationskörper

In der Technik kommen vielfach Rotationskörper vor, von denen man die Trägheitsmomente bestimmen will. Wenn der Körper homogen ist (Dichte $\rho = \text{konst.}$), dann lassen sich die Massenträgheitsmomente bei Rotationskörpern immer einfach aus Flächenmomenten berechnen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie auch diese Aufgabe mit dem Integraphen gelöst werden kann.

Abbildung 11a stellt einen einfachen Rotationskörper dar, dessen Rotationsachse als z -Achse eines räumlichen Koordinatensystems angenommen wird. Ein Punkt seiner Oberfläche ist durch die Zylinderkoordinaten, z , r , φ bestimmt.

¹ Man vgl. dazu etwa FÖPPL, *Technische Mechanik*, Band 3, Seite 83. 7. Auflage. Teubner Leipzig.

Wir betrachten zunächst einen Halbmeridianschnitt dieses Rotationskörpers. *Abbildung 11b* stelle diesen Halbmeridian dar. Von diesem zeichnen wir mit dem Integrativen nach der



in Nr. 4 und 5 angegebenen Weise folgende Flächen und Momente bezüglich der z-Achse :

Fläche :
$$F = \int z \, dr = \int df ,$$

Stat. Moment :
$$M_z = \int r \, df ,$$

Trägheitsmoment :
$$J_z = \int r^2 \, df ,$$

Moment 3. Ord. :
$$M_{3z} = \int r^3 \, df .$$

Ferner bestimmen wir noch nach Nr. 9 das Deviationsmoment C_{rz} und das Moment 3. Ordnung M_{rrz} des Halbmeridians bezüglich Achsen durch 0 (*Abb. 11c*).

Deviationsmoment :

$$C_{rz} = \int \int z \, r \, dr \, dz = \int z \frac{r^2}{2} \, dz = \int z \frac{r}{2} \, df_1 .$$

Gemischtes Moment :

$$M_{rrz} = \int \int z^2 r \, dr \, dz = \int z^2 \frac{r^2}{2} \, dz = \int z^2 \frac{r}{2} \, df_1 .$$

Wir gehen nun zum Rotationskörper über. Aus der *Abbildung 11d* erkennen wir, dass dieser sich aus konzentrischen Hohlzylindern aufbauen lässt. Ein solcher Zylinder hat das Volumen dV

$$dV = 2\pi \, r z \, dr = 2\pi \, r \, df .$$

Infolgedessen ist das Volumen des ganzen Körpers :

$$V = \int 2\pi \, r \, df = 2\pi \, M_z .$$

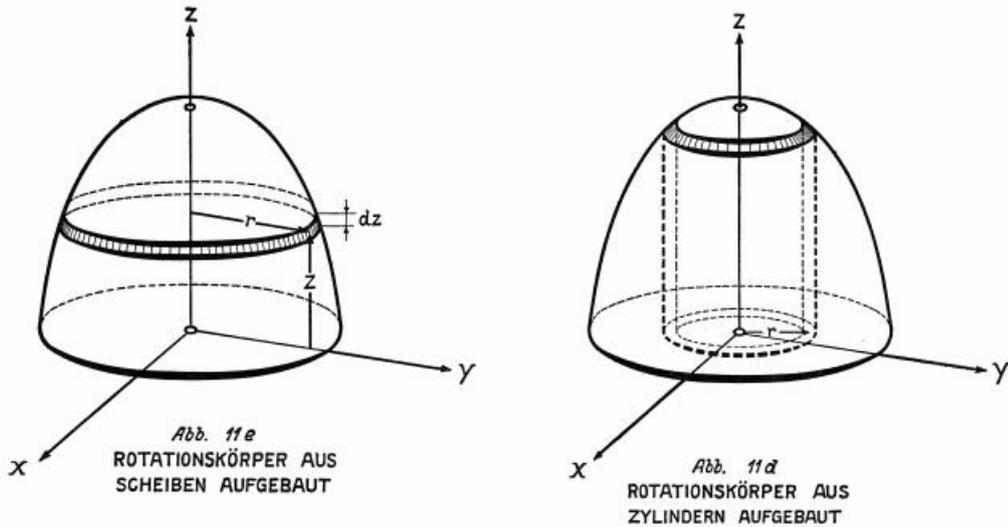
Volumen

Darin ist M_z das oben bestimmte statische Moment der Halbmeridianfläche bezüglich der z -Achse.

Das Trägheitsmoment θ_z in bezug auf die z -Achse setzt sich aus den entsprechenden Trägheitsmomenten der Hohlzylinder zusammen. Da die Dichte ρ für den ganzen Körper dieselbe sein soll, so kann man sie vor das Integralzeichen setzen.

$$\theta_z = \rho \int r^2 2\pi r \, df = 2\pi \rho \int r^3 \, df = 2\pi \rho M_{3z}.$$

Dieses Trägheitsmoment bestimmt sich also, indem man M_{3z} mit $2\pi \rho$ multipliziert.



Neben dem Trägheitsmoment um die z -Achse ist auch das Trägheitsmoment um eine Querachse (beispielsweise um die x -Achse) wichtig. Aus der Definition dieser Trägheitsmomente können wir eine bemerkenswerte Beziehung ableiten :

$$\theta_x = \int (x^2 + z^2) \, dV, \quad \theta_y = \int (y^2 + z^2) \, dV, \quad \theta_z = \int (x^2 + y^2) \, dV.$$

Wir addieren die ersten zwei Momente und erhalten

$$\theta_x + \theta_y = \theta_z + 2\theta_{xy},$$

worin $\theta_{xy} = \int z^2 \, dV$ bedeuten soll; wir nennen θ_{xy} ein Trägheitsmoment bezüglich der xy -Ebene. Für einen Rotationskörper sind θ_x und θ_y einander gleich, so dass $\theta_x = \frac{1}{2}\theta_z + \theta_{xy}$ wird. Wenn es gelingt, θ_{xy} mit dem Integraphen zu bestimmen, so kann auch θ_x mit dem Integraphen bestimmt werden.

Es ist nun

$$\theta_{xy} = \rho \int z^2 \, dV_1,$$

wenn dV_1 das Volumen einer Scheibe bedeutet: (Abb. 11e)

$$dV_1 = r^2 \pi \, dz = 2\pi \left(\frac{r}{2} \, df_1 \right).$$

Damit ergibt sich für θ_{xy}

$$\theta_{xy} = 2\pi \rho \int z^2 \left(\frac{r}{2} df_1 \right) = 2\pi \rho M_{rrz},$$

so dass

$$\theta_x = \pi \rho M_{3z} + 2\pi \rho M_{rrz}$$

ist.

Für das statische Moment bezüglich der x -Achse erhalten wir auf ähnliche Weise :

$$M_x = \int z dV_1 = 2\pi \int z \left(\frac{r}{2} df_1 \right) = 2\pi C_{rz}.$$

Trägheitsmoment
bezüglich
Querachse

Statisches
Moment
bezüglich
Querachse

12. Differenzieren

Der Integrapph kann auch zum Differenzieren gebraucht werden, da das Differenzieren nur die umgekehrte Operation des Integrierens ist. Wir können daher nur den Fahrstift und den Schreibstift vertauschen. Jedoch ist noch auf folgenden Unterschied hinzuweisen : Beim Integrieren muss man den Fahrstift einer Kurve nachführen, beim Differenzieren dagegen muss ausserdem der Fahrstift in der Richtung der Kurventangente mitgedreht werden. Damit man dieses Drehen exakt ausführen kann, wird beim Differenzieren nicht ein gewöhnlicher Fahrstift eingesetzt, sondern ein Spiegel, ein kleines Glasprisma oder eine Marke mit zwei Punkten, welche das Einstellen auf die Kurventangente ermöglichen.

Der *Spiegel* ist vertikal zum Plan gestellt und wird immer derart gerichtet, dass er senkrecht zur Kurventangente steht ; das ist dann der Fall, wenn die Kurve und ihr Spiegelbild bei der Trennungsstelle die gleiche Tangente haben.

Hilfsmittel

Das *Glasprisma* hat ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche. Die Hypotenusenfläche liegt auf dem Papier, und die Kante des rechten Winkels soll senkrecht zur Kurventangente geführt werden : dies ist der Fall, wenn die Bilder der Kurve, von oben durch das Prisma betrachtet, sich in der Kante treffen.

Die *Marke* mit zwei Punkten sitzt unten an einem Glasstab, durch den man sie von oben betrachten kann. Die Punkte werden so eingestellt, dass beide immer auf der Kurve liegen.

Der Integrapph wird bei allen diesen Einstellungen nur an den Handgriffen G (siehe persp. Bilder Nr. 2) gelenkt. Er muss also jetzt auf der Seite des Schreibstiftes geführt werden. Mit etwas Übung wird man bald dazu kommen, den Fahrstift in die gewünschte Richtung zu lenken und zu führen. Man merke sich, dass man den Stift nie direkt führen darf.

Führung des
Instrumentes

Die Richtungsübertragung auf den Spiegel, das Prisma oder den Glasstab geschieht bei den gewöhnlichen Integrapphen mit einem einfachen Hebel, der auch zum Drehen der Reissfeder dient. Integrapphen, mit denen man öfters differenzieren will, kann man mit einer Zahnradübertragung versehen.

Zum Differenzieren verwende man eine nicht zu grosse Basis, deshalb eignet sich der Tischintegrapph besonders gut zum Differenzieren.

Aus den Ordinaten der differenzierten Kurve erhält man die Werte für den Differentialquotienten dG/dx durch Dividieren mit λ . (Man vgl. dazu die Ausführungen in Nr. 1.)

Als Beispiele seien erwähnt :

Aus einer registrierten Geschwindigkeitskurve ergibt sich durch Differenzieren nach der Zeit die Beschleunigung. Aus dieser kann man über die wirkenden Kräfte Aussagen machen. Denn bekanntlich ist : $b = dv/dt$ und $F = mb$, worin b = Beschleunigung, v = Geschwindigkeit, t = Zeit, F = Kraft und m = Masse bedeuten.

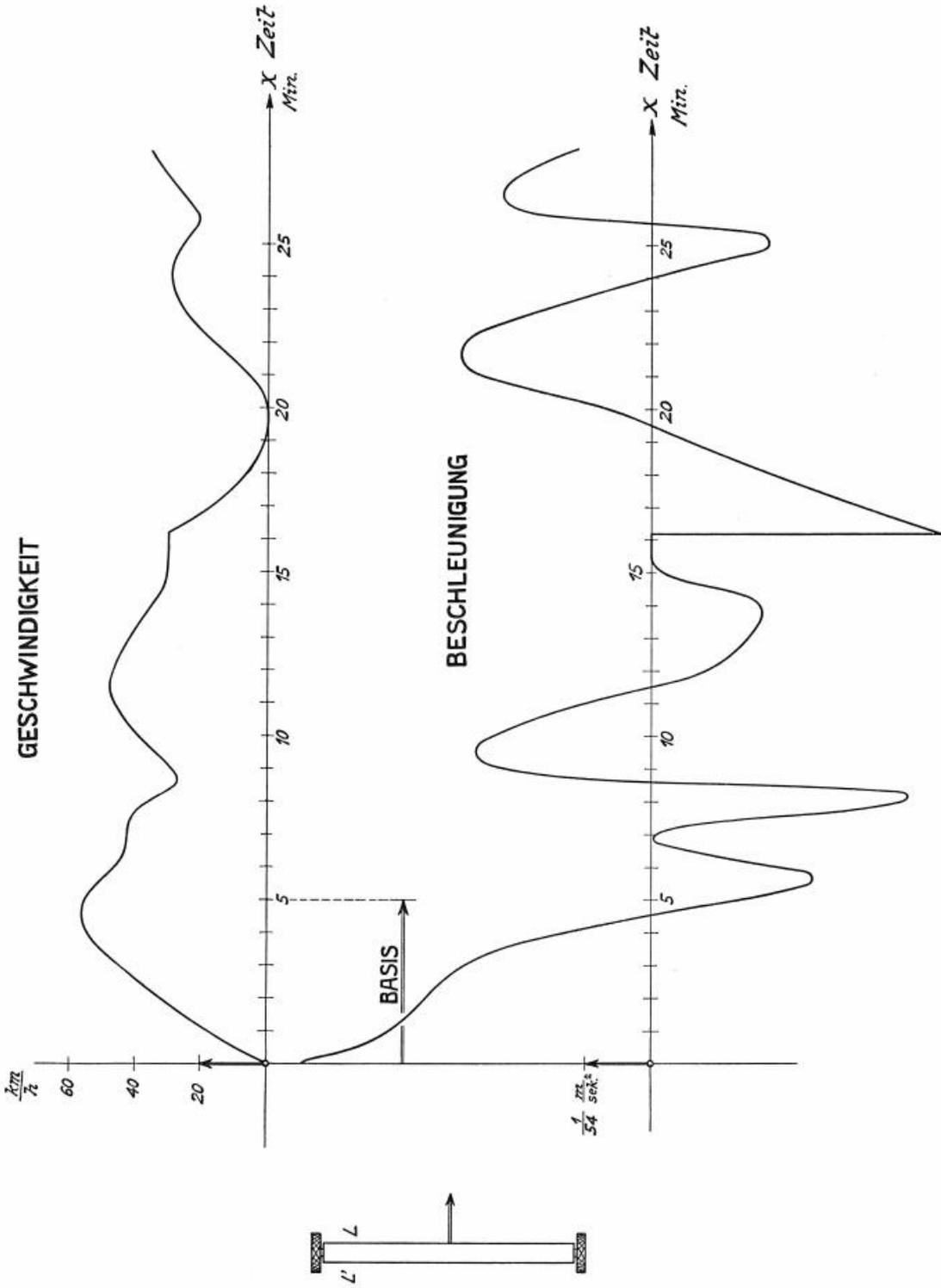


Abb. 12 a

DIFFERENTIATION: GESCHWINDIGKEIT UND BESCHLEUNIGUNG

Aus einem Arbeitsdiagramm bekommt man durch Differenzieren nach der Zeit die momentane Leistung P . Es ist nämlich: $P = \frac{dA}{dt}$, worin A die Arbeit bedeutet.

Wir besprechen noch folgendes Beispiel.

Es ist eine registrierte Geschwindigkeitskurve eines Fahrzeuges gegeben (Abb. 12a). Auf der x -Achse ist die Zeit t in Minuten aufgetragen und die Ordinaten geben die Geschwindigkeiten in km/h an. 1 cm in der Ordinate bedeutet 20 km/h. Die Beschleunigung des Fahrzeuges erhält man durch Differenzieren. Wir differenzieren mit der Basis $\lambda = 5$ min, also ergibt 1 cm Ordinatenlänge:

$$\frac{20 \text{ km/h}}{5 \text{ min}} = \frac{20 \text{ km/h}}{300 \text{ sek}} = \frac{1}{54} \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}.$$

Wir messen am Anfang eine Kurvenhöhe von 5,3 cm. Das entspricht einer Anfangsbeschleunigung von rund 0,1 m/sek².

Zur Zeit $t = 16 \frac{1}{3}$ min bemerken wir in der Geschwindigkeitskurve einen Knick (starkes Bremsen). Die Beschleunigung muss dort einen Sprung besitzen, der in der Zeichnung zu sehen ist.

Ein weiteres Beispiel für das Differenzieren ist in den Abbildungen 12b und 12c aufgezeichnet. Die Grundkurven sind durch Versuche festgestellte elastische Linien von Balken

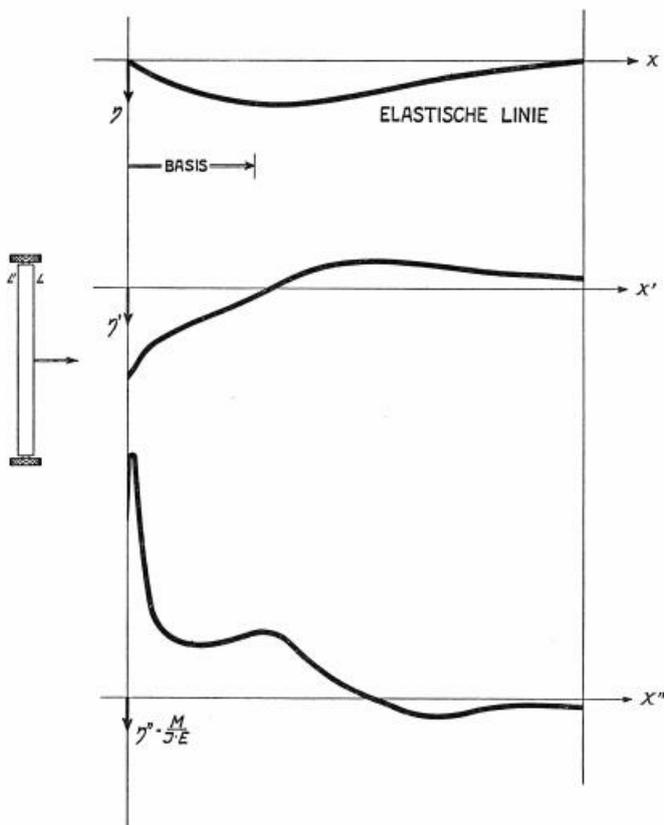


Abb. 12 b

DURCHBIEGUNG UND BIEGUNGSMOMENT

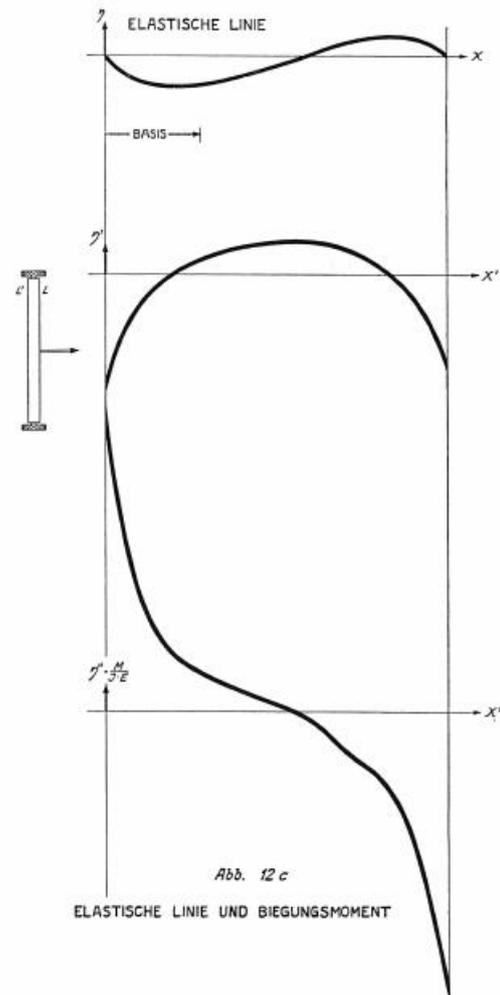


Abb. 12 c

ELASTISCHE LINIE UND BIEGUNGSMOMENT

(Brücken, Tragflächen). In Nr. 7 haben wir aus dem Biegemoment M , dem Trägheitsmoment J der Querschnittsfläche und dem Elastizitätsmodul E die elastische Linie durch Integration gewonnen. Hier unternehmen wir das Umgekehrte. Wir bestimmen aus η , J und E die wirkenden Biegemomente. Es ist

$$\eta'' = \frac{M}{JE}.$$

Für die Bruchfestigkeit ist die maximale Zug- oder Druckspannung σ_{\max} massgebend. Wenn d den Abstand des Balkenrandes von der neutralen Zone bedeutet, so ist

$$\sigma_{\max} = \frac{Md}{J} = \eta'' \cdot E \cdot d.$$

Um σ_{\max} zu finden, muss man daher die elastische Linie zweimal differenzieren.

13. Fehlerrechnung

Es liege eine Messreihe von N Messungen vor. Von diesen N Messungen ergeben n_i den Messwert x_i . Hier ist der Messwert x_i nicht scharf definiert, da bei der Versuchsanordnung immer mit einer Beobachtungsungenauigkeit zu rechnen ist. Der Messwert x_i ist also sinn- gemäss durch ein Intervall von der Breite Δx festzulegen.

Von einer solchen Messreihe interessiert uns

1. die Anzahl der Messungen N ;
2. der Mittelwert der Messungen ξ ;
3. die Streuung der Messung σ .

Diese drei Grössen lassen sich alle mit dem Integraphen bestimmen. Zu diesem Zwecke tragen wir unsere Messreihe graphisch auf (*Abb. 13*). Wir erhalten eine Treppenkurve. Die Höhe jeder Stufe entspricht der Zahl n_i , die Breite ist durch das Messintervall Δx gegeben. Wir nennen diese Kurve die Häufigkeitsfläche.

Die *Anzahl der Messungen* wird durch die Summe

$$N = \sum n_i$$

erfasst. Graphisch erhalten wir N als Flächeninhalt der Häufigkeitskurve.

Der *Mittelwert ξ der Messungen*, definiert durch die Gleichung:

$$\xi = \frac{\sum n_i x_i}{N}$$

ist nichts anderes als die Schwerpunktsabszisse der Häufigkeitsfläche.

Die *Streuung der Messung* ist gegeben durch die Beziehung

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \xi)^2}{N}}.$$

Darin stellt $\sum n_i (x_i - \xi)^2$ das Trägheitsmoment J der Häufigkeitsfläche bezüglich der Schwerpunktsabszisse dar.

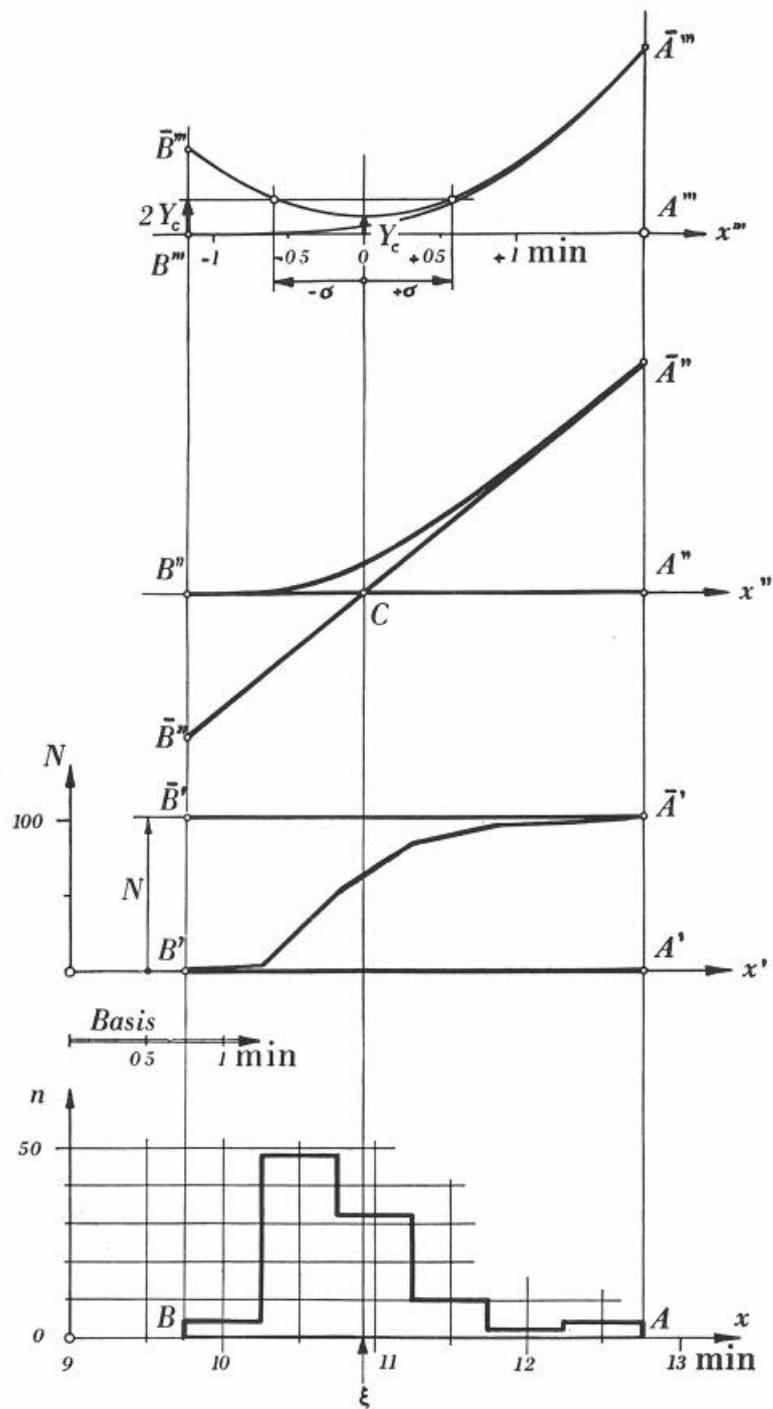


Abb. 13

CHARAKTERISTISCHE GRÖSSEN EINER MESSREIHE

- Unterste Kurve : gemessene Verteilung ; Messintervall 0,5 min, Masstab der Abszisse : **1 cm \cong 0,5 min** ; Masstab der Ordinate : **1 cm \cong 20 Ereignisse pro Messintervall.**
- Zweitunterste Kurve : 1. Integralkurve der gegebenen Verteilung. Basis der Integration : **1,25 min \cong 2,5 Messintervalle** ; Masstab in der Ordinate : **1 cm \cong 2,5 \cdot 20 Ereignisse = 50 Ereignisse.** Ablesung : **$N = 102$ Ereignisse.**
2. Kurve von oben gibt die 2. Integralkurve, der Punkt C bestimmt die Mittelwertsabszisse ξ .
Ablesung : **$\xi = 10,8$ min.**
- Oberste Kurve ist die 3. Integralkurve. Ablesung : **$\sigma = \pm 0,6$ min.**

Es ist also :

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{J}{N}}.$$

Es gelingt auch, die Streuung ohne Rechnung rein graphisch aus den 3. Integralkurven der Häufigkeitsfläche zu finden.

Integriert man nämlich derart, dass die eine Integralkurve der x -Achse der Häufigkeitsfläche immer zur x -Achse für die folgende Integration gemacht wird, so ergibt sich in der 3. Integralkurve als Schlusslinie $\bar{A}'''\bar{B}'''$ eine Parabel, deren Gleichung nach dem Satz von Steiner folgende Form haben muss :

$$2\lambda^3 Y = J + (x - \xi)^2 N.$$

Schneidet man diese Kurve in der Höhe der doppelten Mittelwertsordinate $Y = 2J/\lambda^3 = 2Y_c$, so liegen die Schnittpunkte gerade um σ von der Mittelwertsabszisse entfernt.

Aus σ lässt sich durch eine einfache Rechnung der *mittlere Fehler* m des arithmetischen Mittels bestimmen. Es ist :

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}.$$

14. Linienintegrale

Man möchte von einer Kurve C die folgenden Linienintegrale berechnen :

$$S = \int dS, \quad m = \int x ds, \quad i = \int x^2 ds$$

worin ds das Bogenelement der Kurve sei. Auch diese Integrale lassen sich mit einem Integrgraphen ausmessen. Da der Integrgraph aber nur von einer Fläche Momente zeichnen kann, so muss man versuchen aus der Kurve eine geeignete Fläche zu konstruieren, deren Momente in einem einfachen Zusammenhang zu den Momenten der Kurve stehen. Zu diesem Zweck zeichnen wir Abstandskurven C' und C'' je im Abstand a von der Kurve C und erhalten so einen Streifen der Breite $2a$. Falls die Kurve Endpunkte hat (nicht geschlossen ist), so grenzen wir den Streifen durch die Kurvennormalen in diesen Endpunkten ab.

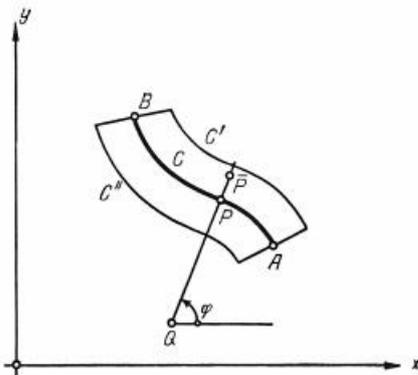


Abb. 14

Kurve C mit seitlichen Streifen.

$PQ = r$: Krümmungsradius.

(Zamp 1/2, Verlag Birkhäuser, Basel)

Ein Punkt P der Kurve habe die Koordinaten x, y , r sei der Krümmungsradius der Kurve in diesem Punkte (Abb. 14). Die Kurvennormale bilde mit der positiven x -Achse den Winkel φ ; auf dieser Normalen liege der Punkt $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ des Flächenstreifens. Der Abstand $P\bar{P}$ werde mit n bezeichnet.

Ein Flächenelement $d\bar{f}$ des Streifens an der Stelle \bar{P} kann folgendermassen ausgedrückt werden :

$$d\bar{f} = (r + n)dn d\varphi.$$

Berechnet man daraus das Flächenelement $d\bar{f}$ des Sektors, der durch zwei benachbarte Normalen aus dem Streifen ausgeschnitten wird, so findet man :

$$d\bar{f} = \int_{n=-a}^{+a} (r + n)dn d\varphi = 2ar d\varphi = 2a ds$$

worin $ds = r d\varphi$ das Bogenelement der Kurve C ist. Somit kann die Bogenlänge

$$S = \int ds$$

der Kurve C aus der Fläche F

$$F = \int dj$$

berechnet werden. Es ist:

$$S = \frac{F}{2a}.$$

Da F mit einem Planimeter oder einem Integrappen bestimmbar ist, so ist es nach dieser Formel auch S .

Das statische Moment einer Kurve

Unter dem statischen Moment einer Kurve versteht man den Wert des Integrals $m = \int x ds$. Man bilde das statische Moment $M = \int \bar{x} dj$ des Streifens. Da

$$\bar{x} = x + n \cos \varphi \quad \text{und} \quad dj = (r + n) dn d\varphi$$

ist, erhält man für das statische Moment dM des Sektors:

$$dM = \int_{n=-a}^{+a} \bar{x}(r + n) dn d\varphi = 2a(xr d\varphi + \frac{a^2}{3} \cos \varphi d\varphi).$$

Daraus erhält man für M :

$$M = 2a \left[\int x ds + \frac{a^2}{3} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \right]$$

wo φ_1 (bzw. φ_2) der Winkel ist, den die Anfangs- (bzw. End-) normale mit der positiven x -Achse einschliesst.

Das zweite Glied verschwindet bei einer geschlossenen Kurve, und bei Kurven deren Anfangs- und Endnormalen parallel oder symmetrisch zur x -Achse sind. Es ist dann

$$\int x ds = \frac{M}{2a}.$$

Falls dies nicht zutrifft, muss man das statische Moment M_1 für einen weitem Streifen bestimmen. Wir wählen einen solchen, dessen Rand einen Abstand $a_1 = 2a$ von der Kurve C hat. Durch Kombination von M und M_1 lässt sich das störende Glied eliminieren, es ist dann:

$$\int x ds = \frac{8M - M_1}{12a}.$$

Trägheitsmoment der Kurve C

Das Trägheitsmoment der Kurve C bezüglich der y -Achse ist definiert durch

$$i = \int x^2 ds.$$

Man bilde I

$$I = \int \bar{x}^2 df$$

über dem Streifen. Das Trägheitsmoment des Sektors dI berechnet sich ähnlich wie oben das statische Moment dM . Wir erhalten :

$$dI = 2a \left[x^2 r d\varphi + \frac{a^2}{3} (r \cos^2 \varphi + 2x \cos \varphi) d\varphi \right].$$

Man findet

$$\frac{I}{2a} = \int x^2 ds + a^2 k;$$

k ist eine Länge, die nicht von der Streifenbreite abhängt und im allgemeinen nicht verschwindet. Um k zu eliminieren bestimmen wir das Trägheitsmoment I_1 des Streifens mit doppelter Breite.

Wie oben findet man

$$\int x^2 ds = \frac{8I - I_1}{12a}.$$

Da man auch gemischte Momente mit dem Integraphen bestimmen kann, so gelingt es auch Kurvenmomente von der Form

$$\int xy ds$$

mit dem Integraphen auszuwerten (man vgl. dazu den Abschnitt 9).

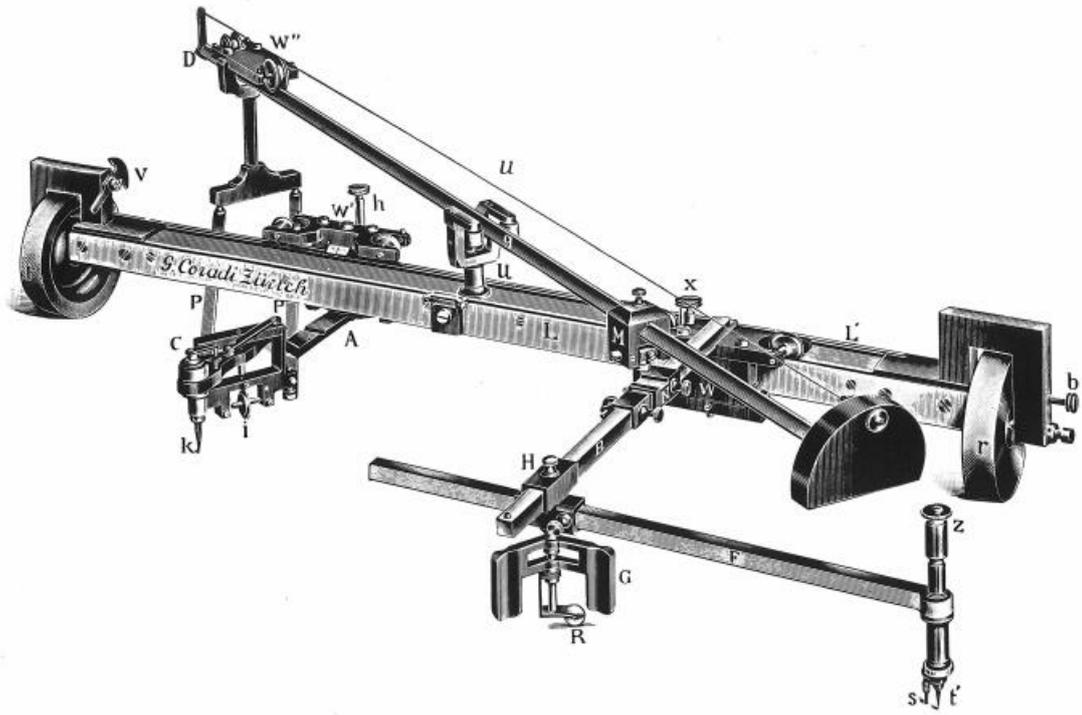
Die Methode des Streifens, wie sie hier entwickelt wurde, geht nur solange als a (bzw. a_1) kleiner ist als r . Insbesondere versagt sie dort wo die Kurve C eine Ecke hat. Man kann sich jedoch so helfen, dass man die ursprüngliche Kurve an der Ecke teilt. Die Streifen der beiden Teilkurven überlappen sich dort, was aber das Integrieren mit dem Integraphen nicht hindert.

REGISTER

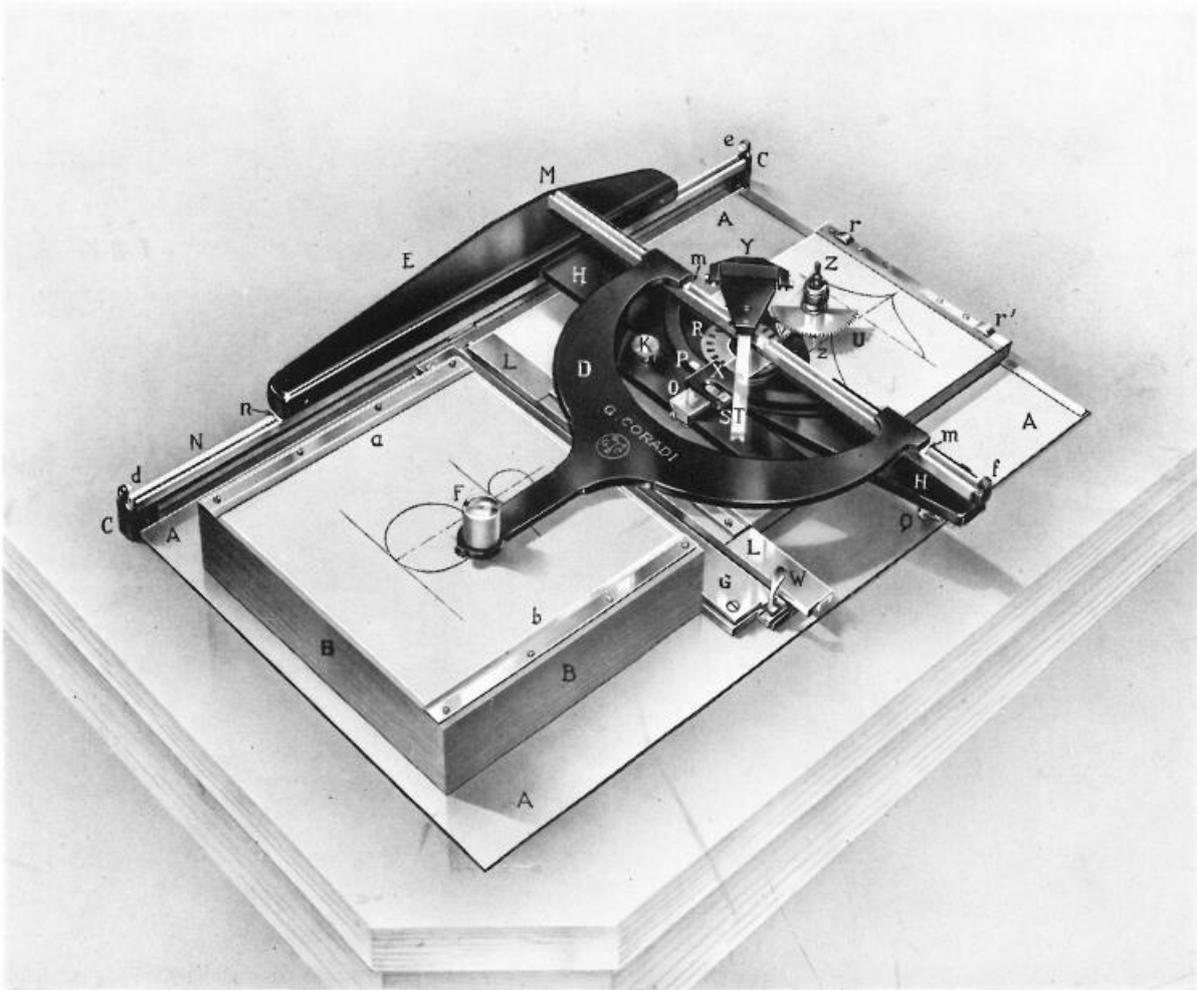
| | Seite |
|--|--------|
| Arretierungsstift X | 12 |
| Ausgangsstellung | 13 |
| Basis | 9 |
| » ,Einfluss. | 14 |
| » ,Einstellung | 12 |
| » ,Richtung | 14 |
| Griff G = Führungsgriff | 13 |
| Fahrstift, Verschiebung | 13 |
| Fläche | 15 |
| Führungsgriff G | 13 |
| Führungswagen W | 10 |
| Integralkurve: unbestimmtes Integral | 9 |
| » : bestimmtes Integral | 15 |
| Integrierwagen W' | 11 |
| Integrierrolle i | 10 |
| Moment, höheres | 17 |
| » statisches | 17, 19 |
| Ordinaten, versetzte. | 13 |
| Orientierung des Apparates | 12 |
| Orthogonalstellung | 12 |
| Richtlineal D | 10 |
| Schwerpunkt | 21 |
| Trägheitsmoment | 17, 21 |
| Vorzeichen der Momente. | 21 |
| X Stift = Arretierungsstift. | 12 |

Größenverhältnisse der Integraphen.

| No. des Kataloges | Seitliche Bewegung des Führungs- und Integrierwagens | Verstellbarkeit der Basis |
|----------------------------|--|--|
| Typ I 41 | 27 cm = 10 ³ / ₄ " | 15 cm bis 5 cm oder 6" bis 2" |
| Typ II 41 | 52 cm = 21" | 20 cm bis 5 cm oder 8" bis 2" |
| Typ III 41 a | 75 cm = 30" | 25 cm bis 5 cm oder 10" bis 2" |
| Typ IV 41 | 100 cm = 40" | 30 cm bis 5 cm oder 12" bis 2" |
| Typ I 40 Tischintegraph | 15 cm = 6" in <i>x</i> und <i>y</i> Richtung | 0,25 cm bis 6,5 cm ¹ / ₁₀ " bis 2 ¹ / ₂ " |



INTEGRAPH Nr. 41 Typ II



TISCHINTEGRAPH Nr. 40 Typ I

