Der
Integraph Abdank-Abakanowicz

von

HENRI LOSSIER
Privat-Dozent an der Universität Lausanne

herausgegeben von

G. CORADI, ZÜRICH
Weinbergstrasse 49

1911

Dem Andenken des Erfinders des Integraphen

† Br. Abdank-Abakanowicz

gewidmet.

Der Integraph

von

HENRY LOSSIER

Privat-Dozent an der Universität Lausanne.

Die mechanischen Integratoren sind Instrumente, die unter gewissen Bedingungen und mit rein mechanischen Hülfsmitteln eine unendliche Reihe unendlich kleiner Grössen zu summieren gestatten. Diese letzteren können Elemente, entweder einer durch eine Kurve begrenzten Fläche oder irgend einer zusammengesetzten Grösse, darstellen, wie zum Beispiel mechanische Arbeit, Wärme, elektrische Energie u. s. w., da die Aufgabe immer auf die Lösung eines bestimmten Integrals zurückgeführt wird.

Die Integratoren sind eine verhältnismässig neue Erfindung, denn sie wurden zum ersten Male im letzten Jahrhundert konstruiert. Es ist also begreiflich, dass deren noch wenige existieren und dass sie bis heute selten Anwendung gefunden haben.

Die *Flächenberechnung* ist eine Aufgabe, die in den angewandten Wissenschaften am häufigsten vorkommt, und auf welche die meisten übrigen Aufgaben zurückgeführt werden können. Deshalb wandten die ersten Erfinder ihre Untersuchungen nach dieser Richtung hin, immer bemüht, lange und ermüdende numerische Rechnungen durch eine einfache mechanische Operation zu ersetzen.

In allen Integratoren beschränkte man sich jedoch darauf, das *Schlussergebnis* der Integration zu suchen (die Planimeter z. B. geben bloss den numerischen Wert der gemessenen Fläche an).

Herr Abdank-Abakanowicz richtete seine Untersuchungen einem ganz anderen Ziele entgegen. Er suchte Integratoren zu konstruieren, die nicht bloss die Summe der Elemente auszuführen im Stande sind, sondern die überdies das Summierungsgesetz als graphische Darstellung einer Kurve angeben und somit ermöglichen, die Fortschritte und den Verlauf der Integration sozusagen Schritt für Schritt zu verfolgen.

Die mit den Integratoren Abdank-Abakanowicz gezeichnete Kurve ist die *Integralkurve.*

Es wurde dieser neuen Art von Integratoren, die zum ersten Male von Herrn Abdank-Abakanowicz konstruiert wurden, den Namen *Integraphen* gegeben.

Die ersten Exemplare dieser Integraphen datieren aus dem Jahre 1878. Seither sind diese Instrumente bedeutend verbessert worden, um sie möglichst genau und praktisch zu gestalten.

Die Integralkurve.

Es sei eine beliebige ebene Kurve $a\ b\ c\ d\ e$ (Fig. 1) gegeben. Zeichnen wir eine zweite Kurve $ABCDE$ derart, dass jede Ordinate, von der Geraden $A\ N$ aus gemessen,

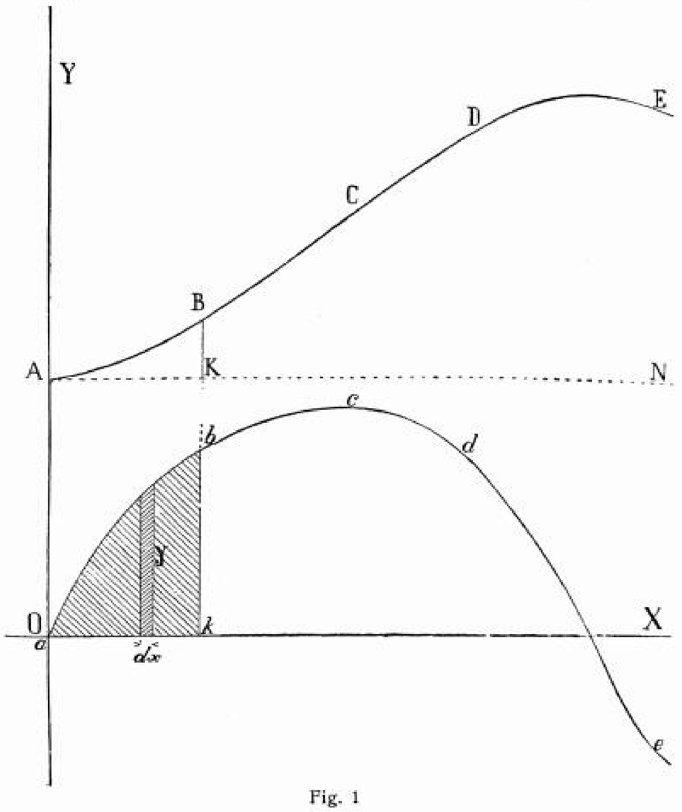


Fig. 1

die parallel der Axe $O\ X$ und durch den Nullpunkt A gezogen wurde, die Fläche darstelle, die von der gegebenen Kurve, der X-Axe und der gewählten Ordinate begrenzt ist. Irgend eine Ordinate, $B\ K$ zum Beispiel, mit einer angenommenen Längeneinheit l multipliziert, ergibt ein Parallelogramm, dessen Fläche gleich $a\ b\ k$ ist.

Die Kurve $A\ B\ C\ D\ E$ ist die *Integralkurve* in Bezug auf *abcde,* welche ihrerseits die *Differenzialkurve* darstellt.

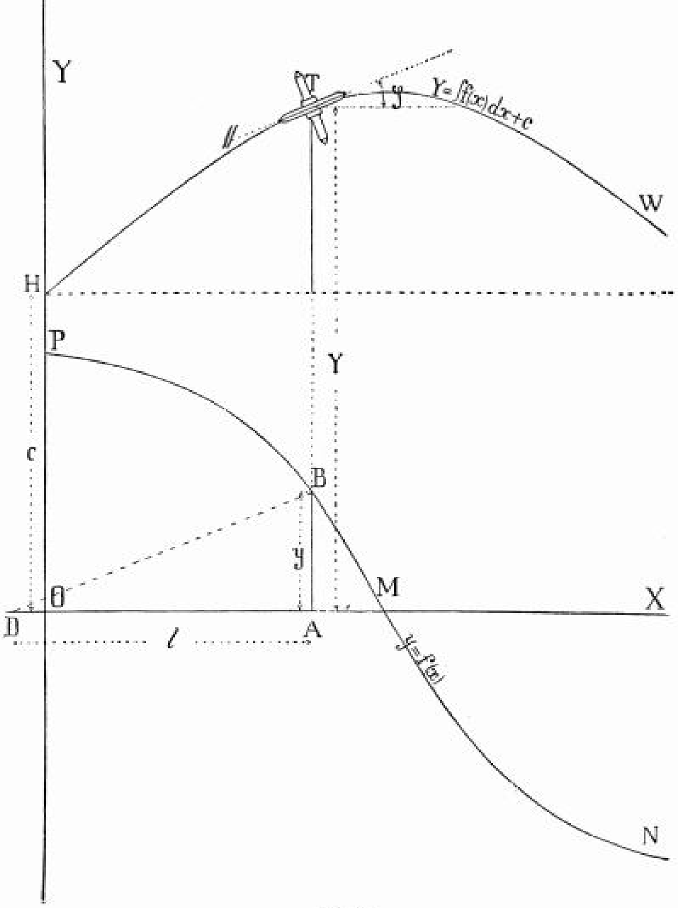


Fig. 2

Es stelle $P\ M\ N$ (Fig. 2) die gegebene Kurve dar, die der Gleichung genügt:

$$y = f\,(x) \qquad (1)$$

Dann wird die Gleichung der Integralkurve $H\ T\ W$ lauten:

$$Y = \int f\,(x)\ dx + c \qquad (2)$$

Differenzieren wir die Gleichung (2)

$$\frac{d\,Y}{dx} = y = tg\,\varphi$$

worin φ den Winkel bezeichnet, den die Tangente der Integralkurve mit der positiven Richtung der *X-Axe* bildet.

Wir sehen also, dass die Ordinate y der gegebenen Kurve gleich ist der trigonometrischen Tangente des Winkels φ.

Wenn wir die Strecke $A\ D$ gleich der angenommenen Längeneinheit l vom Punkte A aus abtragen, so wird die Tangente der Integralkurve in T parallel der Verbindungslinie $D\ B$ sein. Auf diese Weise lässt sich mit grösster Einfachheit die Tangente in einem beliebigen Punkte der Integralkurve konstruieren.

Sehen wir uns noch die Differenzialkurve der Figur 2 näher an.

Legen wir auf derselben Ebene auf irgend einem Punkte T der Ordinate des Punktes B eine Rolle, die wir derart orientieren, dass ihre Ebene parallel der Leitlinie $B\ D$ sei. Wir wollen ihr nun eine Rollbewegung beibringen, die nur in der Richtung der Spur ihrer Ebene vor sich gehen kann.

Wenn wir in jedem Augenblicke die Ebene der Rolle parallel den Leitlinien erhalten, so wird sie die Integralkurve durchlaufen.

Da theoretisch die Rolle die Ebene $O\ X\ Y$ nur in einem Punkte berührt, so wird während der Aenderung ihrer Richtung keine Gleitbewegung vorkommen, und da sie um ihre Axe freibeweglich ist, so wird eine Bewegung in der Richtung der Spur ihrer Ebene ebenfalls kein Gleiten verursachen.

Die Strecke, um welche die Rolle in der Richtung der Y-Axe vorrückt, misst das Integral.

Hierin liegt der Hauptgedanke, der dem Baue der Integraphen Abdank-Abakanowicz zu Grunde gelegt wurde.

Beschreibung des Apparates.

Die untenstehende Figur 3 zeigt die neue Anordnung des Integraphen in etwa $1/5$ der natürlichen Grösse des grossen und in $1/3$ der natürlichen Grösse des kleinen Modells.

Der Integraph hat, wie das Rollplanimeter, 3 Auflagepunkte auf dem Plan, von welchen zwei durch die an der Axe o befestigten Rollen $r\,r$ und der dritte durch den Fahrstift t gebildet werden. Die beiden an gemeinschaft-

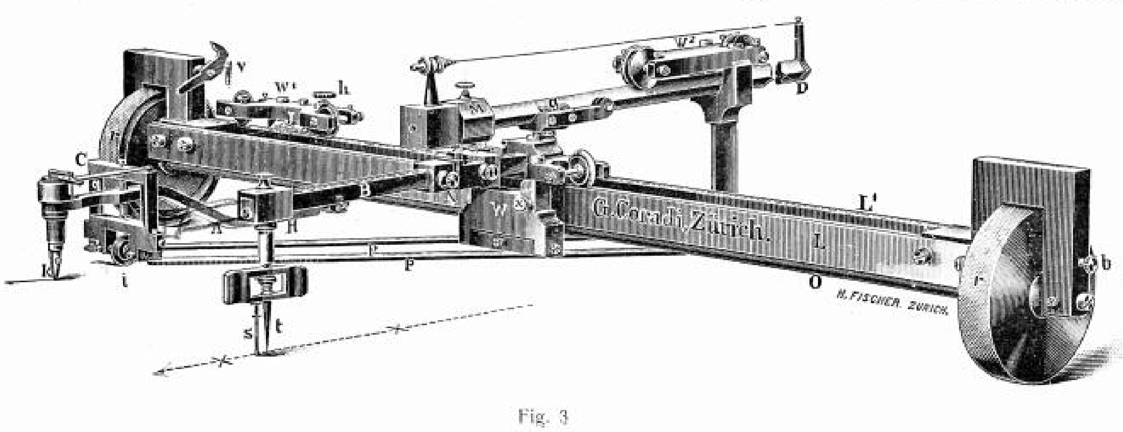


Fig. 3

licher Axe befestigten Rollen geben dem Apparat eine zu dieser Axe rechtwinklige Führung, so dass er sich in beliebig langer gerader Linie auf dem ebenen Plan bewegen lässt.

Der Rahmen, in welchem zwischen Spitzen die Walze *r r* gelagert ist, besteht aus 2 Linealen L und L_1 rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des Apparates, oder parallel zur Axe der Walze.

In der Rinne des vorderen Lineals L bewegt sich der Wagen W der das mit Teilung versehene Basislineal B trägt, an welchem der Fahrstift t und die vordere Vertikalaxe M des Richtlineals D an verschiebbarer Hülse befestigt sind.

In der Rinne des hinteren Lineals L_1 bewegt sich der Integrierwagen W_1, an welchem die Integrierrolle i und die Ziehfeder K angebracht sind. In der Mitte des Rahmens befindet sich die zweite vertikale Axe des Richtlineals; die Axe trägt einen Rahmen g, in welchem eine zwischen Spitzen leicht drehbare Rolle gelagert ist, in deren Rinne das Richtlineal gleitet.

Auf letzterem bewegt sich der Wagen W_2, verbunden durch das Parallelogramm *p p* mit dem Rahmen G, der Integrierrolle i, welches bezweckt, die Rollenebene beständig parallel zum Richtlineal zu erhalten.

Der senkrechte Abstand der beiden Drehaxen des Richtlineals representiert die Basis des Apparates (analog dem Fahrarm des Polarplanimeters).

Die vordere Drehaxe des Richtlineals befindet sich in der Hülse N, welche auf dem mit einer Teilung versehenen Lineal B verschiebbar ist. Diese Teilung ist entweder in mm oder $\frac{1}{10}$" ausgeführt *), die Hülse ist mit einem Nonius und Mikrometerwerk versehen, welches gesattet, $\frac{1}{10}$ mm oder $\frac{1}{100}$" einzustellen. Die Länge der Basis kann zwischen 20 cm und 5 cm (8" bis 2") beim grossen Modell und von 12,5 cm bis 5 cm (5"—2") beim kleinen Integraphen verändert werden.

Die verschiedenen Nonius-Einstellungen auf dem Basislineal, für welche das Verhältnis zwischen den Kurven-Ordinaten und den durch letztere dargestellten Werte eine runde Ziffer ist, sind in der Tabelle im Etui angegeben.

Wenn der Führungswagen W so gestellt ist, dass das Richtlineal senkrecht zum grossen Rahmen steht, mit anderen Worten, wenn es sich in der Richtung der Abscissen befindet, so ist die Umdrehungsebene der Integrierrolle ebenfalls parallel zur X-Axe; wenn bei dieser Stellung des Führungslineals der Apparat sich bewegt, so erfolgt keine seitliche Bewegung des Integrierwagens. Der Führungswagen kann in dieser Stellung (Normalstellung) mittelst eines freifallenden mit x bezeichneten Stiftes fixiert werden, indem dieser, sobald der Führungswagen die Normalstellung erreicht hat, in ein zylindrisches Loch eingreift, das sich in einem mittelst Schrauben seitlich verschiebbaren Stahlstück befindet. Der x-Stift kann durch eine Viertels-Drehung arretiert werden, so dass er in der Höhe bleibt.

*) Das Instrument kann je nach Wunsch mit Teilung nach metrischem oder englischem System versehen werden.

Um den Apparat so zu orientieren, dass die Bewegung des Führungswagens parallel zu den Ordinaten des Planes und die Bewegung des ganzen Apparates parallel zu den Abscissen erfolgt und zugleich der Fahrstift auf der als X-Axe gewählten Linie der zu berechnenden Figur steht, verfährt man am besten wie folgt:

Der Führungswagen wird in der Normalstellung fixiert mittelst des x-Stiftes, alsdann wird der Fahrstift auf die X-Linie gesetzt, der Apparat links und rechts am grossen Rahmen angefasst und etwas vom Papier abgehoben und zwar so, dass er mit geringem Uebergewicht auf dem Fahrstift ruht; nun visiert man über die Lineale L nach einer Ordinate oder über das Basislineal nach einer Abscisse und dreht den Apparat um den Fahrstift als Drehpunkt bis das Lineal L oder das Lineal B parallel zu den Ordinaten resp. Abscissen steht. Bewegt man nun bei fixierter Normalstellung den Apparat in der Richtung des x, so soll der Fahrstift auf der gewählten X-Axe bleiben, etwaige Abweichungen sind durch weiteres Aendern in der Lage des ganzen Apparates zu verbessern.

Diese Operation wird sehr erleichtert durch Anbringung der Vorrichtung *) zur seitlichen Verschiebung des Fahrstifts, wobei letzterer in einer besonders an einem Stabe angebrachten Hülse sich befindet (ähnlich wie bei den Pantographen von G. Coradi). Der Stab ist in einer auf dem Basislineal verschiebbaren Hülse so befestigt, dass er parallel zu den Ordinaten, etwa 25 cm weit verschoben und festgestellt werden kann. Statt des fixen Fahrstifts am Basislineal ist als dritter Stützpunkt des ganzen Apparates eine drehbare Laufrolle wie beim Pantographen angebracht, neben welcher sich der Griff zur Führung des Apparates befindet; der am verschiebbaren Stab befindliche Fahrstift schwebt also ganz frei und *soll nicht zur Führung des ganzen Apparates verwendet werden.*

Nachdem jetzt der x-Stift in die Höhe gestellt ist, kann damit begonnen werden, die zu berechnende Figur im Sinne *der Bewegung des Uhr-Zeigers zu umfahren.*

Ehe man die Figur umfährt, stellt man den Integrierwagen W_1 so weit als möglich nach links. Je weiter nach rechts oder nach links der Führungswagen von der Normalstellung entfernt ist, um so grösser ist der Winkel zwischen dem Richtlineal (oder der Ebene der Integrierrolle, welche stets parallel zum letzteren ist) und der X-Axe, um so grösser wird auch die Bewegung des Integrierwagens in der Y-Richtung sein, wenn sich der Apparat parallel zur x-Axe bewegt. Der Arm A des Integrierwagens trägt die Ziehfeder k und die Integrierrolle i, und kann mittelst einer Schraube h, welche am Wagen W_1 angebracht ist, so abgehoben werden, dass die Rolle i nicht auf dem Plan aufliegt, so dass der Integrierwagen mit der Hand nach rechts oder links verschoben werden kann; dasselbe erreicht man indem man mit der Hand leicht die Reissfederhülse hebt und führt. Es ist zu vermeiden, dass der eine Wagen sich ganz links, der andere sich ganz rechts befinde. Diese Stellung ist bei Anwendung kurzer Einstellungen auf dem

*) Unter No. 42a des Katalogs von G. Coradi.

Basislineal sowieso unmöglich und wird bei korrekter Verwendung des Apparates nicht vorkommen.

An der Seite des Fahrstifts *t*, an dessen beweglichem Griff befestigt, befindet sich die Fahrstiftstütze *s*, die mit, einer Spiralfeder versehen, es ermöglicht, dass die Spitze des Fahrstifts etwas über der Oberfläche des Planes schwebt; durch leichten Druck mit dem Finger auf den Führungsstift dringt dessen Spitze leicht ins Papier ein und markiert den Anfangspunkt der Umdrehung.

Der Fahrstift ist in einer beweglichen Hülse *H* des Basislineals fixiert und kann auf demselben so verstellt werden, dass seine Distanz zur Ziehfeder (in der Abscissenrichtung) gleich einer runden Zahl ist (5 cm; 4 cm; 3 cm; oder $2^1/_2$"; 2"; $1^1/_2$") je nach der angenommenen Basis, so dass die zusammengehörigen Ordinaten der Integral- und der Differenzial-Kurven um diesen runden Abstand gegen einander versetzt sind.

Für kleine Basen (von weniger als 10 cm oder 4") kann der Fahrstift auf dieselbe Ordinate wie die Ziehfeder eingestellt werden; aber auf diese Weise verliert man an Weg für die Bewegung des Integrier- und des Führungswagens.

Die beiden Wagen können eine seitliche Bewegung von 52 cm (20") beim grossen und von 27 cm (10") beim kleinen Modell ausführen. Die grösste Fläche, welche umfahren werden kann, ist ein Rechteck, welches einen der eben angegebenen Werte als Breite hat und von irgend welcher Länge sein kann.

Wenn die Bewegung des Integrierwagens nicht genügt die Differenzialkurve auf einmal zu integrieren, indem er bereits an der Grenze seiner Bewegung nach rechts angelangt ist, so wird wie folgt verfahren:

Man bremst das Instrument mittelst der Bremsschraube *b* rechts im grossen Rahmen, welche auf die grosse Walze wirkt; man bezeichnet den Punkt der Differenzialkurve, wo sich der Fahrstift befindet, und denjenigen der Integralkurve, wo sich die Ziehfeder befindet; sodann hebt man mittelst der Abhebeschraube *h* die Integrierrolle ab und schiebt den Integrierwagen so weit als möglich nach links — die Integration kann sodann ihren Fortgang nehmen.

Bevor eine Integralkurve gezogen wird, ist es notwendig, die Differenzialkurve mit dem Fahrstift ungefähr zu umfahren, indem man die Integrierrolle sich auf dem Papier bewegen lässt, aber ohne die Ziehfeder zu benützen; erst nachdem man sich versichert hat, dass die beiden Wagen in der für sie gewählten Lage ohne Hindernis die Figur beschreiben können, bringt man die Ziehfeder in Aktion; man kann sie auch durch eine Bleistifthülse mit Faber'schen Bleiminen ersetzen. Die Ziehfeder ist durch ein Parallelogramm auf solche Weise mit dem Rahmen der Integrierrolle verbunden, dass die Ebene ihrer beiden Klingen stets parallel zur Bewegung des Integrierwagens ist.

Das Führungslineal kann in der Hülse *M* seiner vorderen Axe bewegt werden und in irgend einer Stellung mittelst Druckschraube festgestellt werden.

Wenn die Stellung der beiden Wagen es verlangt, kann mit Anwendung einiger Vorsicht selbst während der Integration eine Verschiebung und Neueinstellung des Führungslineals vorgenommen werden, ohne dass dadurch das Endresultat beeinflusst wird; man kann auf diese Weise stets, wenn mit kleinen Basen operiert wird, den Schwerpunkt des Apparates zum Fahrstift hin verschieben.

Das hintere Lineal *L* des grossen Rahmens ist mit einer Teilung in Millimeter versehen (oder in $\frac{1}{10}$"). Der Integrierwagen trägt einen Nonius *J* welcher auf $\frac{1}{10}$ mm ($\frac{1}{100}$") abzulesen gestattet, um das Endresultat wie auf einem Planimeter ablesen zu können.

Eine Ordinate von 1 Centimeter (oder ein Zoll englisch) bedeutet bei einer Basis von 10 cm (oder 4"):

bei der ersten Integralkurve		10 cm^2	oder	4□"
„ „ zweiten	„	100 cm^3	„	16□" × "
„ „ dritten	„	1000 cm^4	„	64□" × □"

Für eine Basis, die nur halb so lang ist, sind diese Werte gleich $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ der eben angeführten. Ist die Basis zweimal grösser, so sind diese Werte 2, 4 oder 8mal grösser als diejenigen einer Basis von 4" oder 10 cm.

Ist die Zeichnung im Verhältnis $1:n$ gegeben, so müssen die erhaltenen Werte multipliziert werden mit n^2 für die Fläche; mit n^3 für das statische Moment und n^4 für das Trägheitsmoment.

Es muss besonders darauf geachtet werden, dass die Führungs- sowie die Basis-Lineale nicht verbogen werden. Nie soll das Instrument bei diesen Linealen gefasst werden, wenn dasselbe aufgehoben oder transportiert werden soll; zu diesem Zweck soll es *nur* am grossen Rahmen gefasst werden.

Die Tischfläche, auf welcher der Apparat arbeitet, soll möglichst eben und annähernd horizontal sein; ohne diese Vorsichtsmassregel könnte sich der Apparat von selbst in Bewegung setzen. Um dies zu verhindern ist eine Bremsschraube rechts im grossen Rahmen angebracht; indem man sie leicht anzieht, ist der ganze Apparat unbeweglich. Diese Bremsschraube soll natürlich die Walze nicht berühren während der Benützung des Apparates.

Ehe das Instrument in sein Etui gesetzt wird, sollen die beiden Wagen ganz nach links plaziert werden und in dieser Stellung durch den Riegel festgehalten werden. — Es soll darauf geachtet werden, dass alle Bewegungen des Apparates leicht vor sich gehen. Die Führungsrollen der Wagen sollen sich sehr leicht drehen, jedoch ohne Spielraum; dieser letztere kann vermieden werden durch Anwendung der Körnerschrauben, welche jedoch nicht eher angezogen werden sollen, ehe die über denselben angebrachten Messingdruckschrauben gelüftet worden sind; nach vollbrachter Korrektion sind diese Druckschrauben wieder anzuziehen.

Von Zeit zu Zeit soll ganz wenig feines Uhrenöl an den der Reibung ausgesetzten Teilen angebracht werden.

Das Richtlineal soll immer rein sein und darf nie geölt werden. Am Wagen desselben soll nichts geändert werden, ebensowenig an der Vorrichtung der Rollenlagerung, was die Resultate ändern würde.

Anwendungen.

Um die Fülle und die Verschiedenheit der Anwendungen des Integraphen Abdank-Abakanowicz deutlich vor Augen führen zu können, wäre es angezeigt, die hauptsächlichsten einer näheren Betrachtung zu unterziehen, wie zum Beispiel: Die planimetrischen Aufgaben, die Lösung der numerischen Gleichungen, die Berechnung der Momente verschiedener Art und der Schwerpunkte, die Aufgabe des Erdtransportes, die Berechnung der eingespannten oder der kontinuierlichen Träger, die Theorie der Gewölbe, die Aufgaben des Schiffsbaues, die Untersuchung der dynamischen Systeme, der elektrischen Aufgaben, u. s. w.

Da der uns zur Verfügung stehende Raum sehr beschränkt ist, können wir uns unmöglich in eine so ausführliche Untersuchung einlassen. Wir müssen uns darauf beschränken, die Lösung der numerischen Gleichungen und einige statische Aufgaben zu behandeln.

Wir werden in den folgenden Kapiteln die Konstante oder Basis des Instruments mit K bezeichnen; es ist die Länge, mit welcher die Ordinate der Integralkurve multipliziert werden muss, um die Fläche zu erhalten, die von der Differenzialkurve, der X-Axe und der entsprechenden Ordinate begrenzt ist.

Darstellung und Lösung der numerischen Gleichungen.

Es sei eine Gleichung folgender Art gegeben:

1) $y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Hx^2 + Jx + K$

Wenn wir sie m mal differenzieren, so erhalten wir der Reihe nach die folgenden Gleichungen:

$$2)\ \frac{dy}{dx} = m\ Ax^{m-1} + (m-1)\ Bx^{m-2} + \ldots\ldots + 2\ Hx + J$$

$$3)\ \frac{d^2y}{dx^2} = m\ (m-1)\ Ax^{m-2} + (m-1)\ (m-2)\ Bx^{m-3} + \ldots\ldots + 2\ H$$

. . . .

$$m)\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = m\ (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ldots\ Ax + (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ldots\ B$$

$$(m+1)\ \ \frac{d^my}{dx^m} = m\ (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ldots\ A$$

Es verschwindet bei jeder Differenzierung eine Konstante, die wir uns merken, angesichts der mechanischen Integration.

Die Gleichung $(m+1)$ stellt eine der X-Axe parallele Gerade dar. Wir nehmen diese Gerade als gegebene Kurve an und zeichnen mit Hilfe des Integraphen ihre Integralkurve, die eine schiefe Gerade ist.

Wenn wir die Lage der X-Axe derart feststellen, dass wir die Anfangsordinate gleich machen:

$$(m-1)\ (m-2) \ldots \mathrm{B}.$$

so wird diese gefundene Gerade der folgenden Gleichung genügen:

$$y = m\ (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ldots\ Ax + (m-1)\ (m-2) \ldots B$$

Nehmen wir wieder diese Gerade als gegebene Kurve an und zeichnen wir von neuem die Integralkurve (Parabel), die der Gleichung genügt:

$$y = m\ (m-1) \ldots Ax^2 + (m-1)\ (m-2) \ldots Bx + (m-2) \ldots C$$

[Anfangsordinate $= (\mathrm{m}-2) \ldots\ldots \mathrm{C}$.]

Wiederholt man m mal dieses Verfahren, so erhält man eine Kurve vom m^{ten} Grade, welche die gegebene Gleichung graphisch darstellt.

Damit ist auch die folgende Aufgabe gelöst:

Bestimmung der Lösungen der Gleichung:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Hx^2 + Jx + K = O$$

Dieselben sind nämlich durch die Schnittpunkte der m^{ten} Kurve mit der Abszissenaxe gegeben, währenddem die Schnittpunkte der $(m-1)^{ten}$ Kurve mit der X-Axe die *Maxima* und *Minima* der Funktion darstellen.

Es ist öfters angezeigt, die Konstante K des Integraphen verschieden von 1 zu wählen, um die Kurve bequem zeichnen zu können. In diesem Falle muss jede Differenzialgleichung mit K multipliziert werden, so dass man der Reihe nach bekommt:

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Hx^2 + Jx + K$$

$$K\frac{dy}{dx} = Km\ Ax^{m-1} + K\ (m-1)\ Bx^{m-2} + \ldots\ldots + 2\ K\ Hx + K\ J$$

. . . .

$$K^m\ \frac{d^my}{dx^m} = K^m\ m\ (m-1)\ (m-2)\ \ldots\ldots\ A.$$

Da bei jeder Integration der Exponent von K um eine Einheit kleiner wird, so werden wir nach m Operationen die Kurve erhalten, die der folgenden Gleichung genügt:

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots\ Hx^2 + Jx + K$$

Zahlenbeispiel: Es seien die Lösungen der folgenden Gleichung 4^{ten} Grades zu bestimmen:

$$x^4 - 2{,}50\ x^3 + 1{,}76\ x^2 - 0{,}14\ x - 0{,}12 = 0$$

Wir setzen

1) $y = x^4 - 2{,}50\ x^3 + 1{,}76\ x^2 - 0{,}14\ x - 0{,}12$

Wenn wir differenzieren, so erhalten wir der Reihe nach:

$$2)\ \frac{dy}{dx} = 4\ x^3 - 7{,}50\ x^2 + 3{,}52\ x - 0{,}14$$

$$3)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 12\ x^2 - 15\ x + 3{,}52$$

$$4)\ \frac{d^3y}{dx^3} = 24\ x - 15$$

$$5)\ \frac{d^4y}{dx^4} = 24$$

Wenn die Konstante K des Integraphen gleich ist, so hat man nur die Gerade $y = 24$ zu zeichnen, dann zu integrieren und mit Hilfe der Konstanten $-$ 15 die neue Lage der X-Axe zu bestimmen (für $x = 0,\ y = -15$).

Auf diese Weise erhält man die Gerade:

$$\boldsymbol{y = 24\ x - 15}$$

Integriert man ein zweites Mal unter Berücksichtigung der Konstanten $+ 3{,}52$, so erhält man:

$$y = 12\,x^2 - 15\,x + 3{,}52$$

Integriert man alsdann ein drittes und ein viertes Mal, so erhält man der Reihe nach, wenn die Konstanten $- 0{,}14$ und $- 0{,}12$ eingeführt werden:

$$y = 4\,x^3 - 7{,}50\,x^2 + 3{,}52 = 0{,}14$$
$$\text{und } y = x^4 - 2{,}50\,x^3 + 1{,}76\,x^2 - 0{,}14\,x - 0{,}12$$

Die Schnittpunkte dieser letzteren Kurve mit der X-Axe geben die Lösungen der Gleichung:

$$x^4 - 2{,}50\,x^3 + 1{,}76\,x^2 - 0{,}14\,x - 0{,}12 = 0$$

Die Lösungen sind: $x_1 = -0{,}2$; $x_2 = +0{,}5$; $x_3 = +1{,}0$; $x_4 = +1{,}2$. Die Figur 5 ist die verkleinerte Wiedergabe der graphischen Lösung der vorgelegten Gleichung. In der Originalfigur wurden die auf die Zentren 0_2 und 0_3 sich beziehenden Kurven mit Hilfe einer Basis gleich 5 cm, und die zwei letzteren mit einer Basis gleich 2,5 cm gezeichnet.

Man sagt, die Basis sei gleich der Einheit, wenn sie der *Längeneinheit gleich* gemacht wird; denn wenn die Fläche der Differenzialkurve gleich der Flächeneinheit und die Basis gleich 1 ist, so wird die Ordinate der Integralkurve gleich der Längeneinheit sein. Die Basis wird also, nach ihrer Definition, auch gleich der Längeneinheit sein.

Wenn man mit y die Ordinate der Integralkurve bezeichnet, die mit Hilfe einer Basis gleich der Einheit gezeichnet wurde, und mit y_n diejenige der mit einer Basis gleich n gezeichneten Kurve, so haben wir die Gleichheit:

$$y_1 \times 1 = y_n \times n$$
$$y^n = \frac{1}{n} y_1.$$

Kehren wir zur Figur 5 zurück.

Wenn es sich nur darum handelt, die Lösungen einer Gleichung zu suchen, so ist es nicht notwendig, denselben Maasstab für die Ordinaten und für die Abszissen anzunehmen.

Beim Auftragen der ersten Geraden $y = 24$ haben wir also die Ordinaten in einem beliebigen Maasstab gezeichnet; da in unserem Beispiele die Einheit gleich 2 mm angenommen wurde, haben wir im ganzen 48 mm abgetragen. (Die hier angeführten Maasse beziehen sich alle auf die Originalfigur, deren Verkleinerung die Figur 5 darstellt.)

Die Integration dieser ersten Geraden wurde mit Hilfe einer Basis von 50 mm Länge ausgeführt; daraufhin haben wir den Abscissenmaasstab zu 100 mm = 1 Einheit angenommen. Da darnach die Basis gleich $^1/_2$ ist, haben wir die Anfangsordinate mit dem Maasstabe 4 mm gleich 1 Einheit gezeichnet; sie ist also im Ganzen 60 mm lang.

Da die zweite Integralkurve mit derselben Basis gleich $^1/_2$ gezeichnet wurde, haben wir für die Anfangsordinate 4 mm pro Einheit abgetragen, also im ganzen 28,16 mm.

Es wurde endlich die Integration der zwei letzten Kurven mit Hilfe einer Basis gleich 2,5 cm ausgeführt. Die erste Anfangsordinate wurde zu 32 mm und die zweite zu 128 mm pro Längeneinheit abgetragen.

Das Auswählen der geeigneten Maasstäbe scheint anfangs ziemlich unklar zu sein; nach einiger Uebung lässt sich jedoch die Schwierigkeit leicht überwinden.

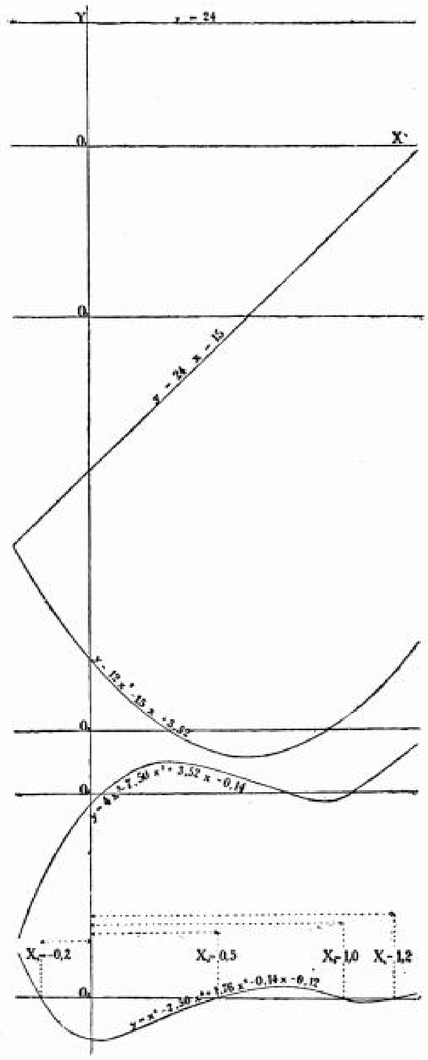


Fig. 5.

Integration der Differenzialgleichungen.

Eine explizierte Differenzialgleichung von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n\,(x).$$

sei durch eine Kurve dargestellt; dieselbe wird integriert, indem man n aufeinanderfolgende Integralkurven zeichnet.

Da diese Aufgabe in den meisten Anwendungen der Integralkurve vorkommt, die wir in den folgenden Seiten anführen, können wir davon Umgang nehmen, ein Beispiel zu geben.

Mit Hilfe der Integralkurve können auch Differenzialgleichungen folgender Form gelöst werden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);\ \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\varphi(x)};\ \frac{dy}{dx} = f(x) + \varphi(y) \ldots.$$

Momente und Schwerpunkte.

Es sei das statische Moment der Fläche $A\,B\,C\,m'$ in Bezug auf die gegebene Axe $K\,K'$ zu bestimmen (Fig. 6).

Nehmen wir ein Flächenelement $y\,dx$ an, in der Entfernung x der Axe $K\,K'$. Das statische Moment dieses

Elements in Bezug auf KK' ist gleich $x\,y\,dx$ und das Moment der ganzen Fläche wird gleich sein:

$$M = \int_{x=0}^{x=AB} x\,y\,dx$$

Wenn die Gleichung der Kurve $A\,m'\,C$ die Form $y = f(x)$ besitzt, so findet man das gesuchte Moment, indem man die angegebene Integration ausführt.

Wenden wir zur Lösung derselben Aufgabe den Integraphen an:

Zeichnen wir die Integralkurve $I\,I'$ und bezeichnen wir mit y_1 eine beliebige Ordinate dieser Kurve. Wir wissen, dass die Ordinate $D\,I'$ die Fläche der gegebenen Kurve misst, deren Moment zu bestimmen ist.

Wir haben also

$$y_1 = \int y\,d\,x$$

Durch Differenziation erhalten wir:

$$d\,y_1 = y\,d\,x$$

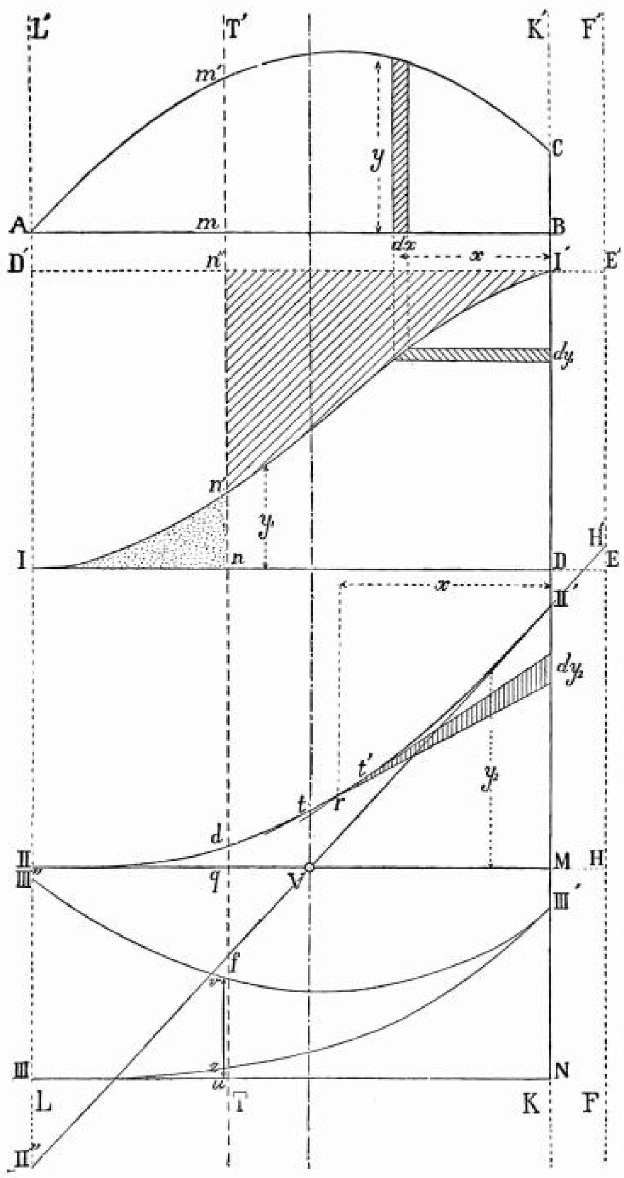


Fig. 6.

Da ein Element des statischen Moments gleich $x\,y\,dx$ ist, das heisst gleich $x\,dy_1$, so wird es durch das in der Figur angegebene horizontale Element dargestellt.

Durch Summation dieser horizontalen Elemente erhält man somit die Fläche $I\,D\,I'$, die das statische Moment der Fläche $A\,B\,C\,m'$ in Bezug auf die Axe $K\,K'$ darstellt.

Sieht man $I\,n'\,I'$ als gegebene Kurve an und zeichnet man eine zweite Integralkurve $II\,II'$, so misst die Ordinate $M\,II'$ die Fläche $I\,D\,I'$, d. h. das gesuchte statische Moment.

Es ist ferner leicht zu erkennen, dass die Fläche $ID'\,I'$ das statische Moment der Fläche $A\,B\,C\,m'$ in Bezug auf die Axe $L\,L'$ darstellt.

Das Moment in Bezug auf die Axe $F\,F'$ wird durch die Fläche $I\,E\,E'\,I'$ gegeben.

Nimmt die Momentenaxe die Lage $T\,T'$ an, so wird das statische Moment als die algebraische Summe der Flächen $I\,n\,n'$ und $n'\,I'\,n''$, von denen die eine positiv und die andere negativ ist, erhalten.

Daraus ist ersichtlich, dass die Ordinate $n\,n'' = D\,I'$ die gegebene Fläche $A\,B\,C\,m'$ darstellt, ferner dass $n\,n'$ das Segment $A\,m\,m'$ misst und dass durch $n'\,n'' = nn'' - n\,n'$ das Segment $m\,B\,C\,m'$ gemessen wird.

(Das Zeichen $=$ setzt voraus, dass die Längen mit der Einheit multipliziert worden sind.)

Verschiebt man nun die Axe $T\,T'$ parallel zu sich selbst, so wird jede Ordinate $n\,n'$ die Fläche links und $n'\,n''$ die Fläche rechts der Axe $T\,T'$ darstellen.

Für eine Lage der Axe $T\,T'$, in welcher $n\,n' = n'\,n''$ wird die Fläche $A\,B\,C\,m'$ in zwei gleiche Segmente geteilt. (Daraus sieht man, dass man mit Leichtigkeit die gegebene Fläche in zwei Segmente von beliebigem Verhältnis teilen kann.)

Schwerpunkt.

Die Flächen $I\,n\,n'$ und $n'\,I'\,n''$ stellen die statischen Momente in Bezug auf die Axe $T\,T'$ dar, wie wir es soeben gesehen haben. Wenn also die Axe $T\,T'$ eine Lage einnimmt in der $I\,n\,n' = n'\,I'\,n''$ ist, so wird das statische Moment der Fläche $A\,B\,C\,m'$ in Bezug auf $T\,T'$ gleich null sein und die Axe wird durch den Schwerpunkt der Fläche $A\,B\,C\,m'$ gehen.

Zeichnen wir von II' aus die Integralkurve der Geraden $I'\,D'$. (Diese Integralkurve ist nichts anders als die Tangente der Kurve $II\,II'$ im Punkte II'.) Der Schnittpunkt V dieser Kurve mit der Abscissenaxe liegt auf der verticalen Axe, die durch den Schwerpunkt der Fläche $A\,B\,C\,m'$ geht.

Es ist tatsächlich für diese besondere Lage der Axe $T\,T'$:

$$\text{Fläche } I\,D\,I' = \text{Fläche } n\,D\,I'\,n''.$$

$$\text{Fläche } I n n' + \text{Fläche } n D I' n' = \text{Fläche } n D I' n' + \text{Fläche } n' I' n''$$

und daher

$$\text{Fläche } I\,n\,n' = n'\,I'\,n''.$$

Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment eines Flächenelements $y\,dx$ in Bezug auf die Axe $K\,K'$ ist gleich $x^2\,y\,dx^3$, und somit das Trägheitsmoment der ganzen Fläche in Bezug auf dieselbe Axe wird gleich sein:

$$\int_{x=O}^{x=AB} x^2 y \, d x.$$

Schauen wir uns die Kurve $II\,II'$ (Fig. 6) näher an, deren Ordinaten wir mit y_2 bezeichnen. Die Ordinate $M\,II'$ stellt die Fläche der Kurve $I\,I'$ dar und jedes Element dy_2 derselben, ein Element dieser Fläche, d. h. ein Element des statischen Momentes.

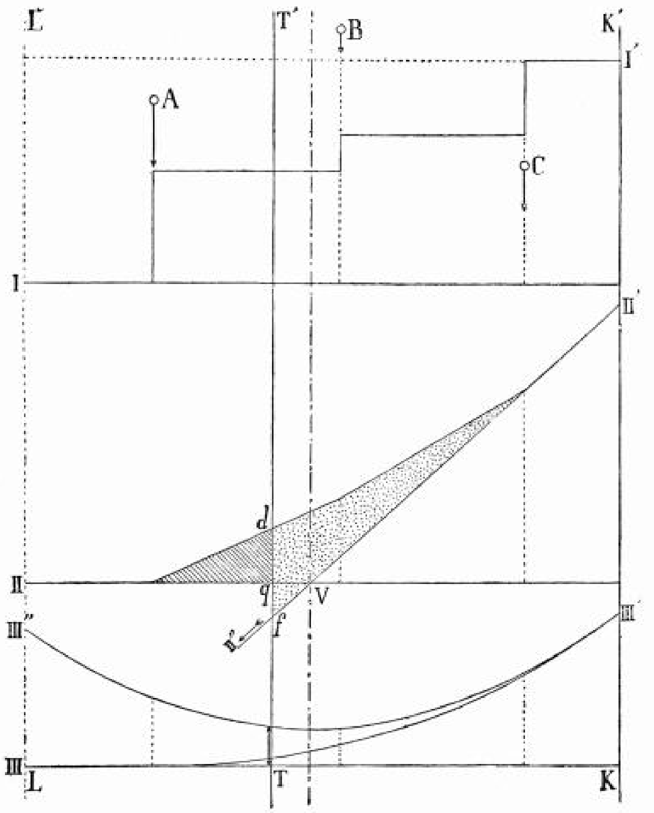


Fig. 7

Um aus diesem Elemente $dy_2 = x\,y\,dx$ ein Element des Trägheitsmomentes abzuleiten, muss dasselbe mit x multipliziert werden. Es handelt sich also darum, diejenige Abscisse zu bestimmen, die dem Elemente dy_2 entspricht. Ziehen wir aus den Endpunkten von dy_2 zwei Tangenten an die Kurve $II\,II'$, deren Berührungspunkte in t und t' fallen. Das entsprechende Element $y\,dx$ wird erhalten, indem man die Vertikalen in t und t' errichtet. Der Schnittpunkt r der Tangenten liegt in der Entfernung x von der Axe $K\,K'$. Die Fläche des Dreiecks, dessen Basis dy_2 ist und dessen Spitze in r liegt, ist gleich $^1/_2\, dy_2\, x$, d. h. gleich der Hälfte des Trägheitsmoments des Elements $y\,dx$ in Bezug auf die Axe $K\,K'$. Die Fläche $II\,M\,II'$ misst also die Hälfte des Trägheitsmoments der Fläche $A\,B\,C\,m'$ in Bezug auf die Axe $K\,K'$.

Es kann in analoger Weise bewiesen werden, dass die Ordinate $II\,II''$, welche die Fläche $I\,I'\,D'$ misst, das statische Moment in Bezug auf die Axe $L\,L'$ und dass die Fläche $II\,II''\,II'$ die Hälfte des Trägheitsmoments der gegebenen Fläche in Bezug auf dieselbe Axe darstellt.

Für eine beliebige Axe $T\,T'$ wird das Trägheitsmoment gleich sein der doppelten Fläche $II\,d\,q$ + der doppelten Fläche $II'\,d\,f$.

Für eine Axe $F\,F'$, die sich ausserhalb der gegebenen Fläche befindet, ist das Trägheitsmoment gleich der doppelten Fläche $II\,H\,H'\,II'\,II$.

Zeichnet man die Integralkurve $III\,III'$ von $II\,II'$, so wird das Trägheitsmoment als Länge erhalten.

Das Trägheitsmoment der Fläche $A\,B\,C\,m'$ in Bezug auf eine Axe $T\,T'$ wird durch die Ordinate $u\,v$ gemessen, deren Segmente $u\,z$ und $z\,v$ die Flächen $II\,d\,q$ und $II'\,d\,f$ darstellen.

Wenn wir, statt einer Fläche, bloss einige Punkte haben (Bestimmung der Elastizitätsellipse eines Fachwerks u. s. w.), so bleibt der Operationsgang derselbe. Die erste Integralkurve $I\,I'$, Fig. 7 wird alsdann die Form eines Polygons annehmen, dessen Seiten der Reihe nach horizontal und vertikal sein werden. Die zweite Integralkurve $II\,II'$ wird

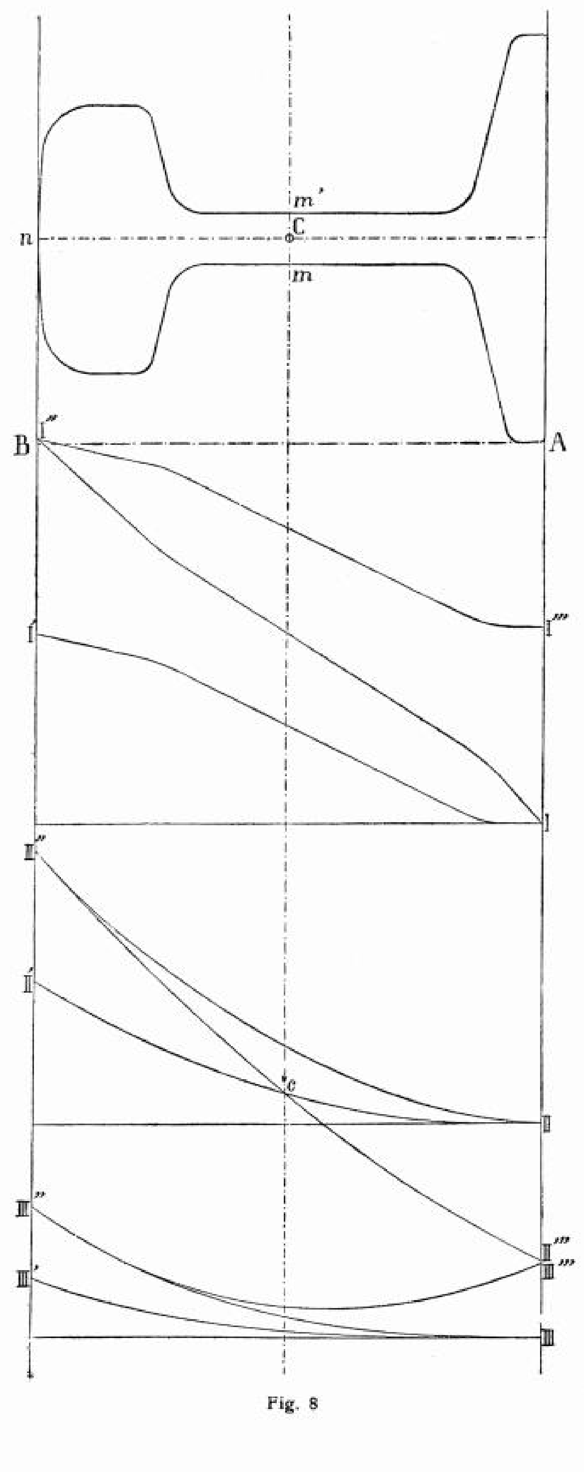


Fig. 8

durch ein aus schiefen Geraden gebildetes Polygon und die dritte Integralkurve $III\ III'\ III''$ durch parabolische Bogen dargestellt sein.

Beispiel. — Es sollen die Fläche und das Widerstandsmoment des in der Figur 8 dargestellten Schienenprofils bestimmt werden.

Die Fläche $A\,m'\,n\,m\,A$ kann als die algebraische Summe der *positiven Fläche* $A\,m'\,n\,B$ und der *negativen Fläche* $A\,m\,n\,B$ angesehen werden. Zeichnen wir zuerst die Integralkurven $I\,I'$ und $I\,I''$ der Flächen $A\,m'\,n\,B$ und $A\,m\,n\,B$ und, vom Punkte I'' aus, ein zweites Mal die Integralkurve der negativen Fläche $A\,m\,n\,B$. Die Differenz zweier korrespondierenden beliebigen Ordinaten dieser Kurve $I''\,I'''$ und der Kurve $I\,I'$ ist konstant und stellt die Fläche des gegebenen Profils dar.

Es ist ersichtlich, dass die Kurven $I\,I'$ und $I''\,I'''$ dieselbe Rolle spielen als die Geraden $I\,D$ und $I'\,D'$ der Fig. 6.

Durch eine zweite Integration erhalten wir die Kurven $II\ II'\ II\ II''$ und $II''\ II'''$; der Schnittpunkt c dieser Kurven $II\ II'$ und $II''\ II'''$ liegt auf der vertikalen Axe, die durch den Schwerpunkt des gegebenen Profils geht.

Eine dritte Integration ergibt uns endlich das Trägheitsmoment des Profils in Bezug auf eine beliebige verticale Axe; das Segment dieser Axe, das sich zwischen den zwei Kurven $III\ III'$ und $III''\ III'''$ befindet, misst die Hälfte des Trägheitsmoments.

Die Fig. 8 stellt die Lösung der gegebenen Aufgabe im Maasstabe 1:2 dar; die Basis des Instruments wurde zur Ausführung der drei Integrationen gleich 10 Centimetern angenommen.

(Alle angegebenen Maasse beziehen sich auf die Originalfigur.)

Die *Fläche* des Profils $A\,m'\,n\,m\,A$ ist gleich der Ordinate $I\,I'$ multipliziert mit der Integrationsbasis.

Fläche $A\,m'\,n\,m\,A = 5{,}23 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 52{,}3 \text{ cm}^2$.

Das *Trägheitsmoment* in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe ist gleich dem doppelten Segmente der Axe, das zwischen den Kurven $III\ III'$ und $III''\ III'''$ liegt, multipliziert mit der Basis in der dritten Potenz.

Hauptträgheitsmoment ist

$$= 2 \times 0{,}68 \text{ cm} \times 1000 \text{ cm}^3 = 1360 \text{ cm}^4.$$

Da die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Axe gleich 7,00 cm ist, haben wir:

$$\textit{Widerstandsmoment} = \frac{1360 \text{ cm}^4}{7 \text{ cm}} = 194 \text{ cm}^3.$$

(Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte" gibt die folgenden Resultate an: Fläche = 52,3 cm², Widerstandsmoment = 193,1 cm³.)

Wir hätten uns selbstverständlich darauf beschränken können, bloss mit der Hälfte des gegebenen Profils zu operieren, da das Profil symmetrisch ist in Bezug auf eine durch C gezogene horizontale Axe.

Scheerende Kräfte und Biegungsmomente.

Es sei $A\,B$ (Fig. 1) ein am Ende B eingemauerter Balken. Seine Belastung werde durch die Kurve $m\,n$ dargestellt, deren Ordinaten wir mit η bezeichnen.

Für einen Schnitt S in der Entfernung a vom Punkte A ist die scheerende Kraft Q gleich:

$$Q = \int_0^a \eta\, dx$$

und das Biegungsmoment M für denselben Schnitt:

$$M = \int_0^a \eta\, dx\,.\,x\,.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die erste Integralkurve $I\,I'$ von $m\,n$ die Kurve der scheerenden Kräfte und die zweite Integralkurve $II\ II'$ diejenige der Biegungsmomente darstellt.

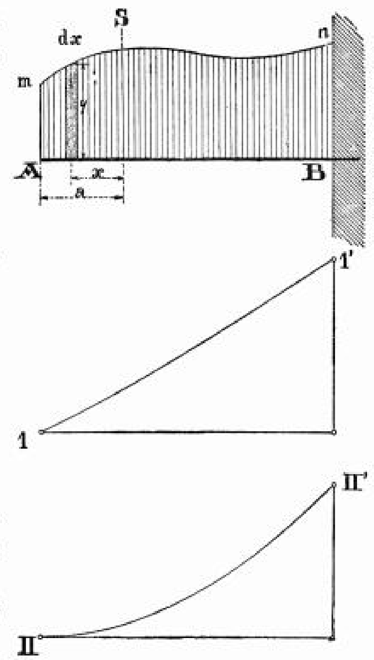


Fig. 1

Diese zweifache Integration ergibt nichts anders als die Seilkurve von $m\,n$. Da die Gleichung dieser Kurve lautet

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\eta}{H}$$

(wobei H die Poldistanz des Kräftepolygons darstellt), so erhalten wir in der Tat die Seilkurve, indem wir zweimal die Kurve $m\,n$ (Ordinate $= \eta$) integrieren.

Elastische Linie.

Die Gleichung der elastischen Linie wird gewöhnlich in der Form gegeben:

$$\frac{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\pm M}{J\,E}\,.$$

In dieser Gleichung stellt M das Biegungsmoment, J das Trägheitsmoment und E den Elastizitätskoeffizienten dar.

In den meisten Fällen ist die Deformation eines Balkens sehr schwach, das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$ ist somit sehr klein, so dass man den Nenner als sehr wenig von 1 verschieden ansehen, und ohne einen grossen Fehler zu begehen, die Gleichung der elastischen Linie in der Form schreiben kann:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{J\,E}\,.$$

Wenn das Trägheitsmoment J konstant bleibt, so braucht man nur die Kurve der Biegungsmomente zweimal zu integrieren.

Wenn dagegen das Trägheitsmoment veränderlich ist, so konstruiert man die Kurve mit der Ordinaten $z = \frac{M.Jc}{J}$, wobei Jc ein beliebiges, jedoch *konstantes* Trägheitsmoment bedeutet. Die elastische Linie erhält man durch zweimalige Integration dieser letzteren Kurve.

Da das Zeichnen der Einflusslinien in den meisten Fällen auf die Bestimmung der elastischen Linien zurückgeführt wird, so kann man sich einen Begriff von der Bedeutung des oben Gesagten machen.

Beispiel:

Als Beispiel haben wir eine Aufgabe gewählt, die in der Berechnung der kontinuierlichen Balken mit veränderlichem Querschnitte angetroffen wird. (Methode des Herrn Prof. W. Ritter.)

Es stelle die Figur 2 den gegebenen Balken aus armiertem Beton dar, und es sei $C\,c\,D$ die zugehörige Kurve des Trägheitsmoments in bezug auf die Axe $A\,B$.

(Zur Berechnung des Trägheitsmoments jedes Querschnitts wurde bloss der Querschnitt des Betons berücksichtigt.)

Wir sollen Folgendes in einem beliebigen Maasstabe bestimmen:

1) Die der Fläche der Biegungsmomente $A_0\,C_0\,B_0$ korrespondierende elastische Linie $A_1\,e\,B_1$.

2) Den Schnittpunkt M der Tangenten der elastischen Linie in A_1 und B_1.

Wir multiplizieren zuerst die Ordinaten der Kurve der Biegungsmomente mit dem Verhältnis $\frac{Jc}{J}$; ($Jc = {}^{35}/_{1000}$ von $J\,max.$) und erhalten derart die Kurve $m\,.\,n\,.\,B_0$.

Die gesuchte elastische Linie wird wie wir es früher gesehen haben durch eine zweifache Integration dieser letzteren Kurve gefunden.

Zeichnen wir die erste Integrallinie $I\,r\,II$ von $m\,.\,n\,.\,B_0$. Es soll die Lage der Abscissenaxe OO' derart bestimmt werden, dass die äussersten Punkte A_1 und B_1 der elastischen Linie auf einer Horizontalen liegen. Diese Bedingung wird erfüllt sein, wenn die algebraische Summe der Flächen $O\,I\,r$ und $O'\,II\,r$ gleich null ist.

Wir werden also Folgendes haben:

$$\text{Fläche } O\,I\,r = \text{Fläche } O'\,II\,r$$

$$\text{Fläche } O\,I\,r + \text{Fläche } I\,r\,O'\,II' = \text{Fläche } O'\,II\,r + \text{Fläche } I\,r\,O'\,II'$$

Also:

$$\text{Rechteckige Fläche } O\,I\,II'\,O' = \text{Fläche } I\,r\,II\,II'$$

Wir erhalten also die gesuchte Länge $O\,I$, indem wir die Fläche $I\,r\,II\,II'$ durch die Länge $I\,II'$ dividieren.

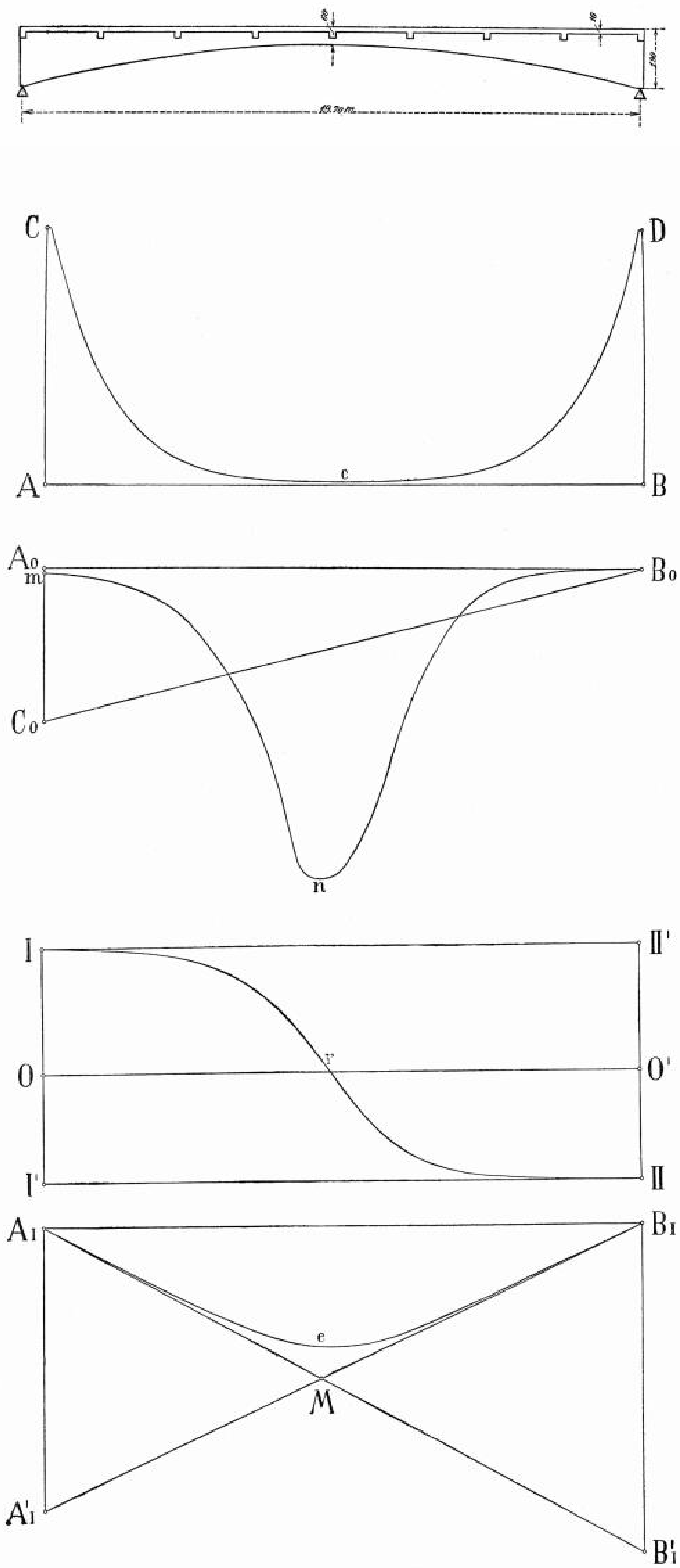


Fig. 2

Durch Integration der Kurve $I\,r\,II$ bezogen auf die *Axe* $O\,O'$, erhalten wir die gesuchte elastische Linie $A_1\,e\,B_1$.

Die Tangenten $A_1\,B_1'$ und $B_1\,A_1'$ in den äussersten Punkten A_1 und B_1 der elastischen Linie sind die Integrallinien der Horizontalen $I\,II'$ und $II\,I'$.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Der kontinuierliche Balken.

Untersuchen wir die in der Figur 3 dargestellte Deckenplatte aus armiertem Beton. (Die in diesem Kapitel angeführten Figuren sind die Darstellungen der Originalzeichnungen im Maasstabe 1/4.)

Wenn wir die Durchbiegungen der Unterzugsbalken, sowie den Widerstand, den sie den Formänderungen der Deckenplatte leisten, vernachlässigen, sind wir berechtigt, letztere als ***kontinuierlichen auf seinen Stützen frei aufliegenden Balken von veränderlichem Querschnitt*** anzusehen.

Wir setzen uns vor, die Kurve der scheerenden Kräfte und diejenige der Biegungsmomente für einen bestimmten Belastungsfall zu bestimmen.

Berechnen wir zuerst die Einflusslinie für einen der Auflagerdrücke $X'\,X''$ der Unterzugsbalken B und C.

Wenn wir die zwei Auflagerdrücke $X'\,X''$ eliminieren, so erhalten wir einen einfachen, auf seinen Stützen frei aufliegenden Balken $A\,D$.

Nehmen wir $X' = 1$ an und bestimmen wir die zugehörige elastische Linie des Balkens $A\,D$.

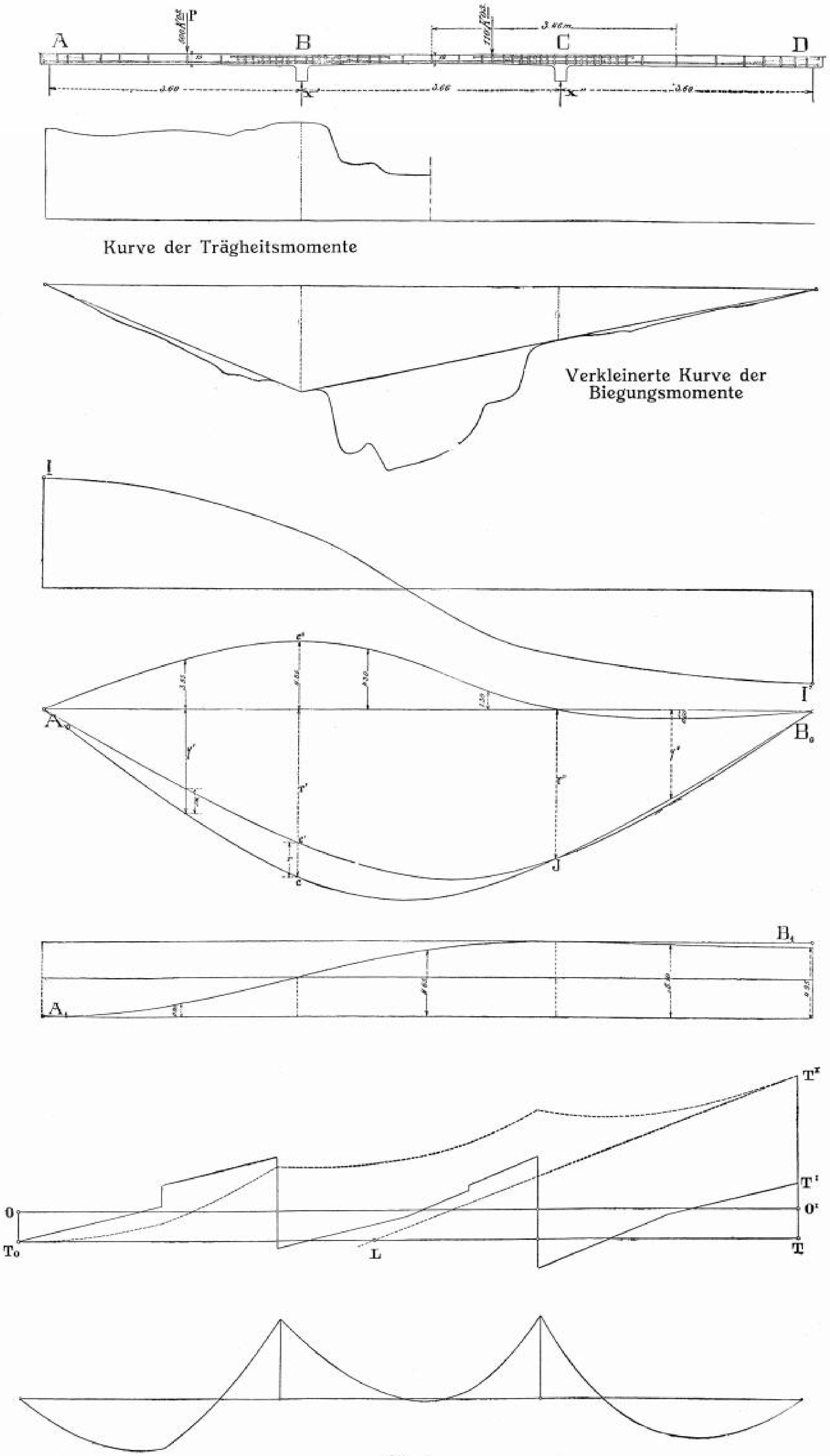


Fig. 3

Dann zeichnen wir zuerst die Kurve, deren Ordinaten $z = \frac{M \cdot J c}{J}$ sind, wie wir es oben angegeben haben, wobei

Jc = Konstantes beliebiges Trägheitsmoment

J = Veränderliches Trägheitsmoment.

(Die Ordinaten z werden am schnellsten mit Hilfe des Rechenschiebers berechnet.)

In unserem Beispiele haben wir Jc gleich dem Maximalträgheitsmoment angenommen.

Die gesuchte elastische Linie $A_0\, c\, J\, B_0$ erhalten wir durch zweimalige Integration der Kurve, deren Ordinaten gleich z sind. Die Abscissenaxe der ersten Integralkurve $I I'$ wurde wie im vorigen Beispiele bestimmt.

Nehmen wir nun an, es wirken auf den gegebenen Balken $A D$ die drei vertikalen Kräfte P, X' und X'' ein. Wenden wir den Maxwell'schen Satz über die gegenseitige Verschiebung der Angriffspunkte der äusseren Kräfte an, so können wir die Einsenkungen in B und C folgendermassen ausdrücken:

In B: $\delta' =$ Konstante $(P\eta' - X' r' - X'' r'')$;

In C: $\delta'' =$ Konstante $(P\eta'' - X' r'' - X'' r')$,

und da $\delta' = \delta'' = O$,

$X' r' + X'' r'' = P\eta'$ und $X' r'' + X'' r' = P\eta''$

daraus berechnen wir X':

$$X' = \frac{\eta' - \eta'' \frac{r''}{r'}}{r' - r'' \frac{r''}{r'}}$$

Wenn wir die elastische Linie für $X'' = 1$ zeichnen, indem wir ihre Ordinaten mit $\frac{r''}{r'}$ multiplizieren (Linie $A_0\, c'\, J\, B_0$), so haben wir unter Berücksichtigung der Bezeichnungen der Figur:

$$\eta = \eta' - \eta'' \frac{r''}{r'}$$

ferner

$$r = r' - r'' \frac{r''}{r'}$$

und also

$$X' = P \frac{\eta}{r}$$

Die von den 2 Kurven $A_0\, c\, J\, B_0$ und $A_0\, c'\, J\, B_0$ eingeschlossene Fläche ist also die Einflussfläche für X'.

Es ist nicht notwendig, den Maasstab zu kennen, mit welchem unsere elastischen Linien gezeichnet worden sind, da wir bloss das Verhältnis $\frac{\eta}{c}$ in Betracht zu ziehen haben.

Wenn wir mit *gleichmässig verteilter Belastung* zu tun haben, ist es zweckmässig, die Einflusslinie für diesen Belastungsfall zu bestimmen.

Diese letztere Linie wird durch einmalige Integration der Einflusslinie für einzelne Lasten gefunden.

Die gleichförmig verteilte Belastung pro Längeneinheit sei mit p bezeichnet.

Ein Belastungselement $p\, dx$ erzeugt einen Auflagerdruck

$$d\, X' = \frac{\eta}{r}\, p\, dx.$$

Wenn die gegebene Belastung von a bis b reicht, so werden wir erhalten:

$$X'_{ab} = \int_a^b \frac{\eta}{r}\, p\, dx = \frac{p}{r} \int_a^b \eta\, dx.$$

Das Integral $\int_a^b \eta\, dx$ ist nichts anders als der Teil der Einflussfläche, der zwischen den Ordinaten mit den Abscissen a und b liegt.

Wenn wir mit β_a und β_b die den Abscissen a und b korrespondierenden Ordinaten der Integralkurve $A_1\, B_1$ bezeichnen, so haben wir:

$$\int_a^b \eta\, dx = \mu\, (\beta_b - \beta_a)$$

wobei μ die Integrationsbasis darstellt; und daraus

$$X'_{ab} = \mu \frac{p}{r}\, (\beta_b - \beta_a).$$

Wir haben in unserem Beispiel die Fläche $A_0\, c\, J\, B_0\, c'\, A_0$ auf die horizontale Axe $A_0\, B_0$ bezogen und dabei aus Genauigkeitsgründen ihre Ordinaten im doppelten Maasstabe abgetragen (Kurve $A_0\, c''\, B_0$).

Die Einflusslinie $A_1\, B_1$ für gleichmässig verteilte Belastung ist durch Integration der Linie $A_0\, c''\, B_0$ mit einer Integrationsbasis gleich 20 cm gezeichnet worden.

Wir haben noch die Kurve der scheerenden Kräfte sowie die der Biegungsmomente für den folgenden beliebig gewählten Belastungsfall zu bestimmen (siehe Figur).

1.) Gleichmässig verteilte Belastung von 400 kg pro laufenden Meter, auf die ganze Spannweite $A D$ verteilt.

2.) Gleichmässig verteilte Belastung von 300 kg pro laufenden Meter, auf beiden Seiten vom Punkte C auf 3,46 m Gesamtlänge verteilt.

3.) Einzellast von 500 kg zwischen A und B.

4.) Einzellast von 110 kg zwischen B und C.

Führen wir die numerischen Werte in den Formeln für X' und X'' ein, so haben wir:

$$X_1' = X_1'' = \mu \cdot \frac{p}{r} (\beta_b - \beta_a) =$$

$$\frac{0{,}20 \text{ m} \times 400 \text{ kg} \times 4{,}95 \text{ cm}}{4{,}85 \text{ cm}} \times 20 \text{ (Maasstab der Zeichnung)}$$

$$X_1' = X_1'' = 1630 \text{ kg.}$$

$$X_2' \mu \,.\, \frac{p}{r}\, (\beta_h - \beta_a) =$$

$$\frac{0{,}20 \text{ m} \times 300 \text{ kg}}{4{,}85 \text{ cm}} (5{,}10 \text{ cm} - 4{,}65 \text{ cm})\ 20 = 111 \text{ kg}$$

$$X_3' = \frac{P\eta}{r} = \frac{500 \text{ kg} \times 3{,}55 \text{ cm}}{4{,}85 \text{ cm}} = 366 \text{ kg}$$

$$X_1' = \frac{P\eta}{r} = \frac{110 \times 1{,}30}{4{,}85}\ 29{,}5 \text{ kg}$$

$$X' = X_1' + X_2' + X_3' + X_4' = 2136 \text{ kg}$$

$$X_2'' = \frac{0{,}20 \times 300}{4{,}85} (4{,}65 - 0{,}90)\ 20 = 927 \text{ kg}$$

$$X_3'' = \frac{500 \times (-0{,}6)}{4{,}85} = -62 \text{ kg}$$

$$X_4'' = \frac{110 \times 4{,}3}{4{,}85} = 97{,}5 \text{ kg}$$

$$X'' = X_1'' + X_2'' + X_3'' + X_4'' = 2{,}592 \text{ kg}$$

Damit ist die Aufgabe auf die Berechnung eines einfachen an seinen beiden Enden frei aufliegenden Balkens zurückgeführt. Da wir nur mit Einzellasten und gleichmässig verteilter Belastung zu tun haben, so wird die Linie der scheerenden Kräfte einzig und allein aus Geraden bestehen. Wir haben sie in unserem Beispiele im Maasstabe 3 cm pro 1000 kg gezeichnet ($T_0\ T'$).

Wir haben noch die Abscissenaxe $O\ O'$ dieser letzteren Linie, oder was dasselbe ist, die Auflagerdrücke in A und D zu bestimmen.

Wir zeichnen zu diesem Zwecke die Integralkurve $T_0\ T''$ von $T_0\ T'$ und vom Punkte T'' aus, die Integrallinie der durch T' gezogenen Horizontalen. Der Schnittpunkt L dieser letzteren Integrallinie mit der Geraden $T_0\ T$ liegt, nach dem was wir früher über die Schwerpunkte gesehen haben, auf der Resultierenden der Kräfte die auf den Balken $A\ D$ wirken.

Wir haben also:

$$T\,T' \times L\,T = T\,O' \times T_0\,T = T_0\,O \times T_0\,T$$

und daraus:

$$T_0\,O = T\,O' = \frac{T\,T' \times L\,T}{T_0\,T}.$$

Die Kurve der Biegungsmomente schliesslich wurde durch Integration der Kurve der scheerenden Kräfte erhalten. Die Basis des Instrumentes wurde dabei gleich 2,5 cm angenommen.

Eine Ordinate von 1 cm Länge der Kurve der Biegungsmomente stellt also dar:

$$\text{Ordinate gleich 1 cm} = \frac{2{,}5 \text{ cm} \times 20}{3 \text{ (cm p. 1 t)}} = \frac{50}{3} \text{ t} \times \text{cm}$$

Die vorgelegte Aufgabe ist somit vollständig gelöst.

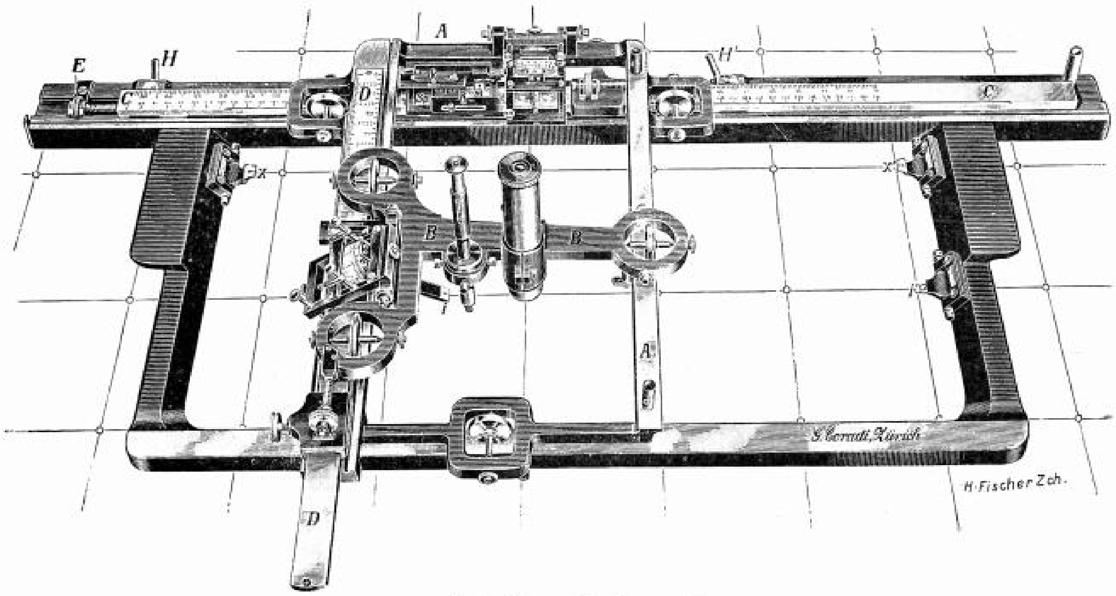
Wir haben persönlich den Integraphen Abdank-Abakanowicz zur Lösung einer grossen Anzahl technischer Aufgaben verwendet, hauptsächlich zum Zeichnen der Durchbiegungslinien von Balken mit veränderlichem Querschnitt.

Neben der erstaunlichen Genauigkeit der uns von Herrn Coradi in Zürich, dem bekannten Erbauer von Präzisionsinstrumenten, gelieferten Integraphen, hatten wir jedesmal durch deren Gebrauch eine bedeutende Zeitersparnis zu verzeichnen.

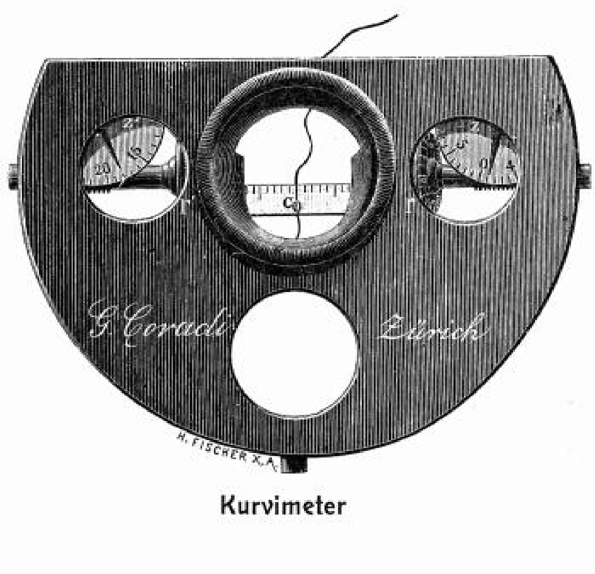
Dieser Vorteil wäre noch weit fühlbarer für grössere technische Bureaux. Ein einziger Rechner könnte die Arbeit mehrerer Integraphen vorbereiten und kombinieren, deren Handhabung gewissenhaften Personen, die jedoch keine sehr weitgehende technische Bildung genossen haben, anvertraut werden kann.

Wir sind zum Schlusse dieser ersten Schrift angelangt, die den Zweck hatte, den Integraphen Abdank-Abakanowicz sowie einige seiner Anwendungen im Gebiete der Statik bekannt zu machen. Wir werden vielleicht später die Gelegenheit haben auf die Lösung einiger spezieller Aufgaben zurückzukommen.

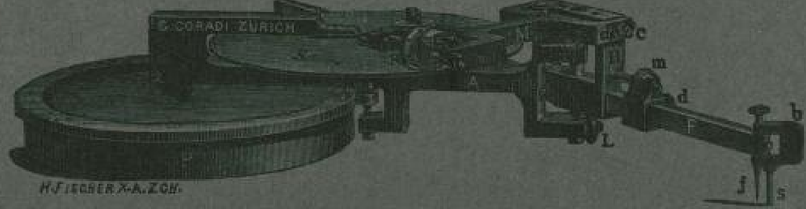
Wir wollen es nicht unterlassen, dem Herrn Professor W. Ritter unsern verbindlichsten Dank auszusprechen für die nützlichen Ratschläge, die er uns im Laufe dieser ersten Abhandlung zu teil werden liess.



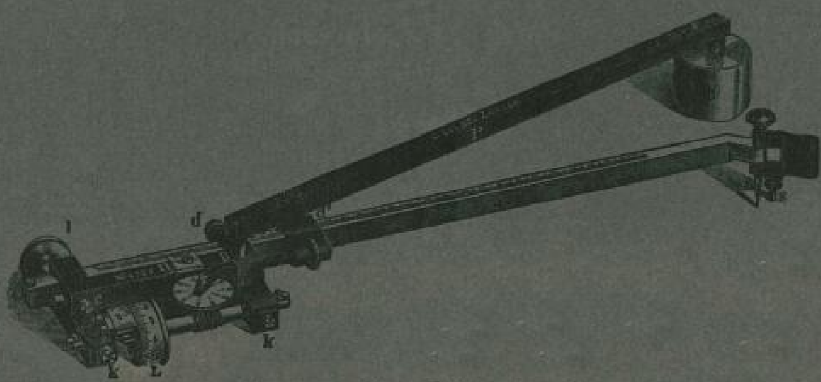
Detailkoordinatograph



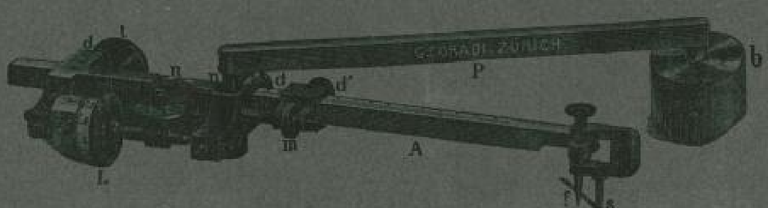
Kurvimeter



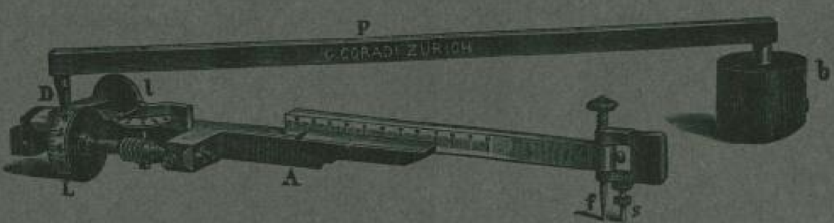
Präzisions-Scheibenplanimeter



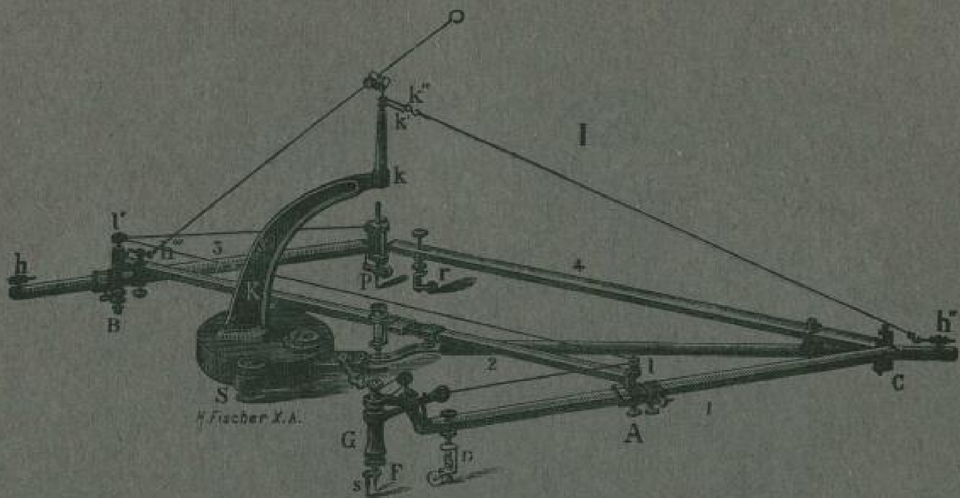
Kompensations-Planimeter III



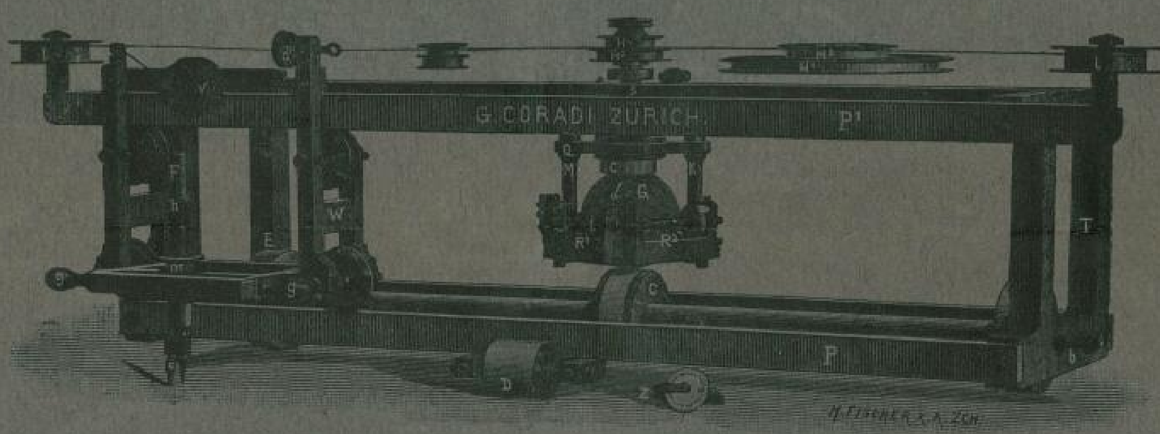
Kompensations-Planimeter II



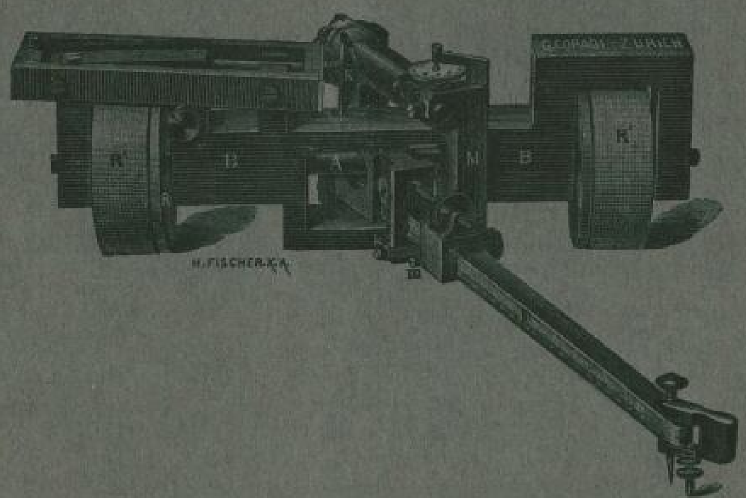
Kompensations-Planimeter I



Präzisions-Pantograph



Harmonischer Analysator



Kugelroll-Planimeter

ASCHMANN & SCHELLER. ZURICH.